Wochenplan zu Wendestellen; Kurvendiskussion und Tangenten

```
reset() //Entleert sämtliche Speicher!
```

```
assume(Type::Real) //Definiert die Definitionsmenge über die reele
```

$\mathbb{R}$

A1

a)

```
f:=x->1/2*x^3-4*x^2+8*x // Definition einer Funktion mit der Variable "x".
```

$$x \to \frac{x^3}{2} - 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x$$

- -

1. Schritt: Ableitungen

```
f'
```

$$x \to \frac{3 \cdot x^2}{2} - 8 \cdot x + 8$$

```
f''
```

$$x \to 3 \cdot x - 8$$

```
f'''
```

$$x \to 3$$

- -

2. Schritt: Symmetrie

```
bool(f(x)=f(-x)) //Achsensymmetrie zur y-Achse
```

FALSE

```
bool(f(-x)=-f(x)) //Punktsymmetrie zum Ursprung
```

FALSE

Bei ganzrationalen Funktionen:
Sowohl gerade wie auch ungerade Exponenten -> keine Symmetrie erkennbar

- -

3. Schritt: Nullstellen

```
solve(f(x)=0,x) // Schnitte mit der x-Achse
```

$\{0, 4\}$

$\{0, 4\}$

x_0_1= 0
x_0_2 = 4

NST bei (0I 0) und (4I 0).

- -

4. Schritt: Schnitt mit der y-Achse:

```
f(0)
```

0

Der y-Achsenabschnitt liegt bei y=0 und dementsprechend auf dem Ursprung.

- -

5. Schritt: Verhalten für IxI -> unendlich / "Globales Verhalten"

```
limit(f(x),x=+infinity)
```

∞

```
limit(f(x),x=-infinity)
```

$-\infty$

- -

6. Schritt: Extremstellen

```
solve(f'(x)=0,x) //Notwendige Bedingung für Extrema
```

$\left\{\frac{4}{3}, 4\right\}$

Mögliche Extremstellen
x_e_1 = 4/3
x_e_2 = 4 .

Bestimmen, ob HP, TP oder SP vorliegt:
Hinreichende Bedingung für Extrema:

1.Vorgehensweise:

x_e_1 = 4/3

```
f'(5/6)
```

$\frac{19}{8}$


```
f'(11/6)
```

$-\frac{13}{8}$

$-\frac{13}{8}$

VZW von + zu- -> HP an der Stelle x_e_1 = 4/3.

x_e_2 = 4

```
f'(3.5)
```

-1.625

```
f'(4.5)
```

2.375

VZW von - zu + -> TP an der Stelle x_e_2 = 4.

2.Vorgehensweise:

x_e_1 = 4/3

```
f''(4/3)
```

-4

```
f''(4)
```

4

f''(x)<0 (negativ)-> HP an der Stelle x_e_1 = 4/3.
f''(x)>0 (positiv)-> TP an der Stelle x_e_2 = 4.

(Falls f''(x)= 0 -> SP!!)

"Lokal" oder "Global":
Im Vergleich mit dem *5. Schritt: Verhalten für IxI -> unendlich / "Globales Verhalten"* kann es **keine globalen Extrema** geben, da der Funktionsgraph sowohl ins negativ als auch in das positiv unendliche strebt.

Daher sind **alle gefundenen Extrema lokal**.

Ermitteln des y-Wertes der Extremstellen:

```
f(4/3)
```

$\frac{128}{27}$

HP bei (4/3 I 128/27)


```
f(4)
```

0

0

TP bei (4 I 0) .

- -

7. Schritt: Wendestellen

```
solve(f''(x)=0,x) //Notwendige Bedingung für Wendestellen
```

$$\left\{\frac{8}{3}\right\}$$

Mögliche Wendestelle bei x_w = 8 / 3.

Bestimmen, ob WP oder SP vorliegt:
Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

1.Vorgehensweise:

x_w = 8/3

```
f''(15/6)
```

$$-\frac{1}{2}$$

```
f''(17/6)
```

$$\frac{1}{2}$$

VZW der zweiten Ableitung von - zu + -> WP mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle x_w = 8/3 .

(VZW der zweiten Ableitung von + zu - -> WP mit Links-Rechts-Krümmung an der Stelle x_w)

2.Vorgehensweise:

x_w = 8/3

```
f'''(8/3)
```

$$3$$

f'''(x) > 0 (positiv)-> TP der ersten Ableitung -> WP mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle x_w = 8/3.

(f'''(x) < 0 (negativ)-> HP der ersten Ableitung -> WP mit Links-Rechts-Krümmung an der Stelle x_w)

(Falls f'''(x)= 0 -> SP!!)

Ermitteln des y-Wertes der Wendestelle:

Ermitteln des y-Wertes der Wendestelle:

```
f(8/3)
```

$$\frac{64}{27}$$

WP bei (8/3 I 64/27)

```
float(8/3);
float(f(8/3))
```

2.666666667

2.37037037

WP bei (ca. 2,67 I ca. 2,37) .

- -

8. Schritt: Monotonie-Intervalle:
Aus *6. Schritt: Ermitteln der Extrempunkte* folgt mit

x_e_1 = 4/3 => HP (VZW in ***f ' von + zu -***) und
x_e_2 = 4 => TP (VZW in ***f ' von - zu +***) ,
dass es insgesamt *drei verschiedene* Monotonieintervalle geben muss:

I: (- unendlich; 4/3) : G_f streng monoton steigend (***f ' (x) > 0 <=> f ' positiv*** !!!)
II: (4/3; 4) : G_f streng monoton fallend (***f ' (x) < 0 <=> f ' negaitiv*** !!!)
III: (4; + unendlich) : G_f streng monoton steigend (***f ' (x) > 0 <=> f ' positiv*** !!!)

- -

Oft gerne als zusätzliche Information abgefragt:
9. Schritt: Wendetangente:
Wir wissen:
WP mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle x_w = 8/3 mit (8/3 I 64/27).
Für die Tangentengleichung benötigen wir:
*Steigung m
*Y-Achsenabschnitt b:

```
m:=f'(8/3)
```

$$-\frac{8}{3}$$

```
b:=solve(f'(8/3)*8/3+b=64/27,b)
```

$$\left\{\frac{256}{27}\right\}$$

Daraus folgt die Tangentenfunktionsgleichung:

Daraus folgt die Tangentenfunktionsgleichung:

```
t:=x->m*x+b
```

$x \rightarrow m \cdot x + b$

mit

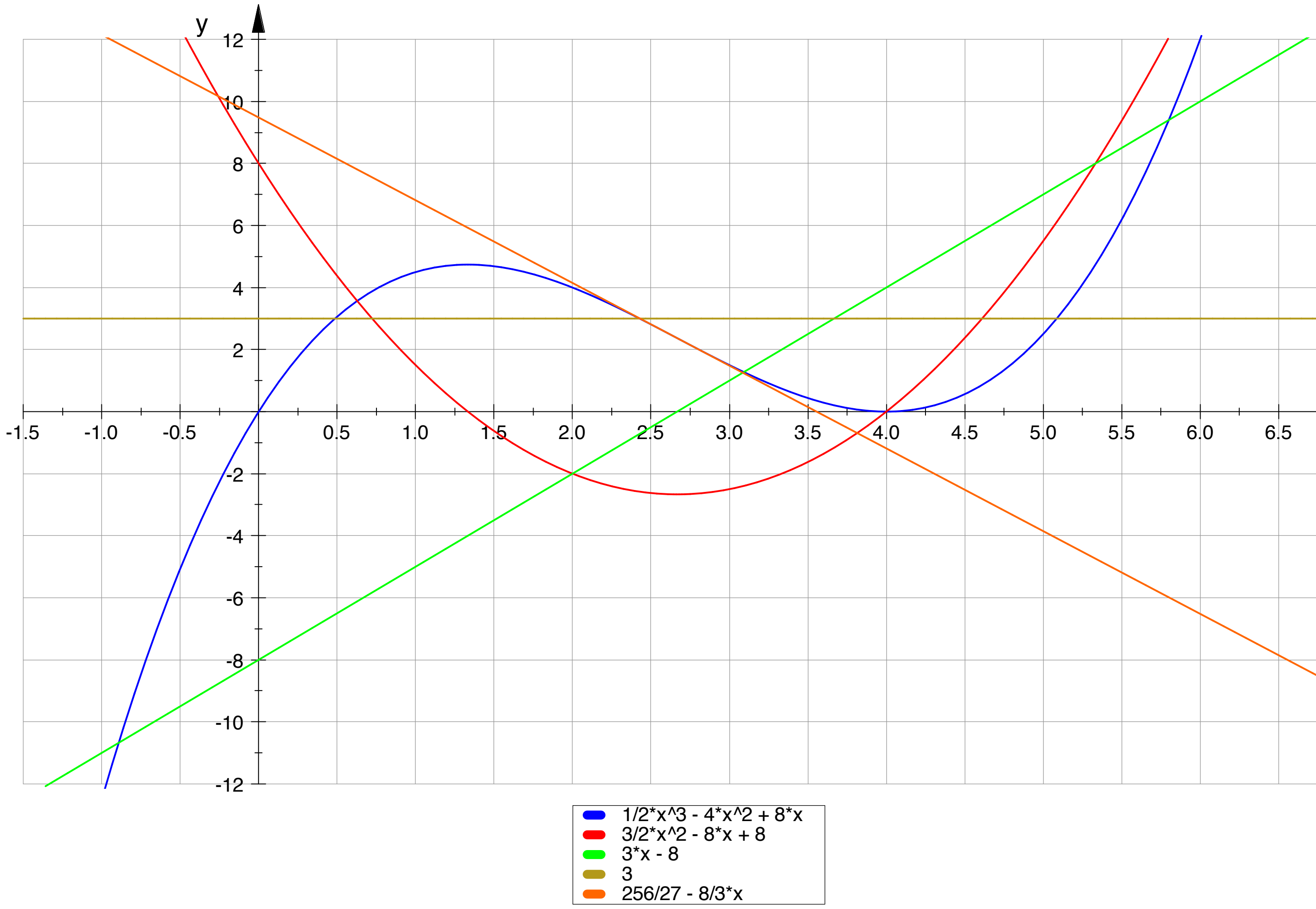
```
t_w:=x->-8/3*x+256/27
```

$x \rightarrow \frac{256}{27} - \frac{8 \cdot x}{3}$

- -

10. Schritt: Graphen zeichnen (f, f', f'' und f'''), wenn vorhanden auch Wendetangente t_w

```
plotfunc2d(f(x),f'(x),f''(x),f'''(x), t_w(x),x=-1.5..7,YRange=-12..12, Gri
```




```
reset() //Entleert sämtliche Speicher!
```

```
assume(Type::Real) //Definiert die Definitionsmenge über die reele
```

$\mathbb{R}$

A1

b)

```
g:=x->1/4*(1+x^2)*(5-x^2) // Definition einer Funktion mit der Variable "x
```

$$x \rightarrow \frac{(1+x^2)\cdot(5-x^2)}{4}$$

```
expand(g(x))
```

$$-\frac{x^4}{4}+x^2+\frac{5}{4}$$

```
g_a:=x->-1/4*x^4+x^2+5/4
```

$$x \rightarrow x^2-\frac{x^4}{4}+\frac{5}{4}$$

ODER:

```
normal(g(x))
```

$$-\frac{x^4}{4}+x^2+\frac{5}{4}$$

- -

1. Schritt: Ableitungen

```
g';
g_a';
```

$$x \rightarrow -\frac{x\cdot(x^2+1)}{2}-\frac{x\cdot(x^2-5)}{2}$$

$$x \rightarrow 2\cdot x-x^3$$

$$x \rightarrow 2 \cdot x - x^3$$

```
g''
```

$$x \rightarrow 2 - 3 \cdot x^2$$

```
g'''
```

$$x \rightarrow -6 \cdot x$$

- -

2. Schritt: Symmetrie

```
bool(g(x)=g(-x)) //Achsensymetrie zur y-Achse
```

TRUE

Es liegt eine Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

Bei ganzrationalen Funktionen:
Der Funktionsterm enthält nur gerade Exponenten -> Achsensymmetrie zur y-Achse

- -

3. Schritt: Nullstellen

```
solve(g(x)=0,x) // Schnitte mit der x-Achse
```

$$\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

(Wurzel -> "sqrt" in MuPad)

```
float(solve(g(x)=0,x))
```

$$\{-2.236067977, 2.236067977\}$$

x_0_1= ca. - 2,24
x_0_2 = ca. + 2,24

NST bei (ca. -2,24 I 0) und (ca. + 2,24 I 0).

- -

4. Schritt: Schnitt mit der y-Achse:

```
g(0)
```

$$\frac{5}{4}$$

```
float(g(0))
```

1.25

Der y-Achsenabschnitt liegt bei y = 1,25 .

- -

5. Schritte: Verhalten für IxI -> unendlich / "Globale Verhalten"

```
limit(g(x),x=+infinity)
```

$-\infty$

```
limit(g(x),x=-infinity)
```

$-\infty$

- -

6. Schritt:
Ermitteln der Extrempunkte

```
solve(g'(x)=0,x) //Notwendige Bedingung für Extrema
```

$\left\{0,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right\}$

```
float(solve(g'(x)=0,x)) //Notwendige Bedingung für Extrema
```

$\{-1.414213562,\ 0.0,\ 1.414213562\}$

Mögliche Extremstellen sind
x_e_1 = ca. - 1,414 ,
x_e_2 = 0 und
x_e_3 = ca. + 1,414 .

Bestimmen, ob HP, TP oder SP vorliegt:
Hinreichende Bedingung für Extrema:

1.Vorgehensweise:

x_e_1 = - 1.414

```
g'(-1.42) // Anstieg in der Ausgangsfunktion
```

0.023288

```
g'(-1.40) // Gefälle in der Ausgangsfunktion
```


-0.056

-0.056

VZW von + zu - -> HP an der Stelle x_e_1 = - 1.414.

x_e_2 = 0

```
g'(-0.1) // Gefälle in der Ausgangsfunktion
```

-0.199

```
g'(0.1) // Anstieg in der Ausgangsfunktion
```

0.199

VZW von - zu + -> TP an der Stelle x_e_2 = 0.

x_e_3 = 1.414

```
g'(1.40) // Anstieg in der Ausgangsfunktion
```

0.056

```
g'(1.42) // Gefälle in der Ausgangsfunktion
```

-0.023288

VZW von + zu - -> HP an der Stelle x_e_3 = + 1.414.

2.Vorgehensweise:

f''(x) < 0 (negativ)-> HP
f''(x) > 0 (positiv)-> TP

Falls f''(x) = 0 -> SP (Sattelpunkt)!!

x_e_1 = - sqrt(2) = ca. - 1,414 ,
x_e_2 = 0 und
x_e_3 = + sqrt(2) = ca. + 1,414 .

x_e_1 = - 1,414

```
g''(-sqrt(2)) // sqrt -> Quadratwurzel
```

-4

Da g''(x_e_1) negativ ist, ist der Punkt (-1.414 I g(-1.414)) ein Hochpunkt.

x_e_2 = 0

```
g''(0)
```


2

2

Da g"(x_e_2) positiv ist, ist der Punkt (0 I g(0)) ein Tiefpunkt.

x_e_3 = + 1,414

```
g''(+sqrt(2)) // sqrt -> Quadratwurzel
```

-4

Da g"(x_e_3) negativ ist, ist der Punkt (+1.414 I g(+ 1.414)) ein Hochpunkt.

"Lokal" oder "Global":
Im Vergleich mit dem *5. Schritt: Verhalten für IxI -> unendlich / "Globales Verhalten"*
kann es **keine globalen Minima (y-Wert der TP!)** geben,
da die Funktionswerte
sowohl für x-> -unendlich
als auch für x->+ unendlich
ins negativ unendliche streben.

Daher sind **alle gefundenen Minima lokal**.

Für die zwei Maxima (y-Wert des Hochpunktes) gilt:
Da aus *2. Schritt: Symmetrie* folgt, dass beide Hochpunkte "gleich hoch" liegen,
sind **beide Maxima global**!

Ermitteln des y-Wertes der Extremstellen:
x_e_1 = - sqrt(2) = ca. - 1,414 :

```
g(-sqrt(2))
```

$\frac{9}{4}$

```
float(g(-sqrt(2)))
```

2.25

HP bei (-sqrt(2) I 2,25)

x_e_2 = 0 :

```
g(0)
```

$\frac{5}{4}$

```
float(g(0))
```

1.25

TP bei (0 I 1,25) .

x_e_3 = + sqrt(2) = ca. + 1,414 :

```
g(+sqrt(2))
```

$$\frac{9}{4}$$

```
float(g(+sqrt(2)))
```

2.25

HP bei (+`sqrt(2)` I 2,25)

- -

7. Schritt:
Ermitteln der Wendepunkte

```
solve(g''(x)=0,x) //Notwendige Bedingung für Wendestellen
```

$$\left\{-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}$$

```
float(solve(g''(x)=0,x))
```

$\{-0.8164965809, 0.8164965809\}$

Mögliche Wendestellen bei
x_w_1 = - ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. - 0,816 und
x_w_2 = + ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. + 0,816 .

Bestimmen, ob WP oder SP vorliegt:
Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

1.Vorgehensweise:

x_w_1 = - ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3)

```
g''(- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ) - 0.1 )
```

$$2-3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}+0.1\right)^{2}$$

```
g''(+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ) + 0.1  )
```

$$2-3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}+0.1\right)^{2}$$

```
float(g''(- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ) - 0.1 ))
```

-0.5198979486

```
float(g''(- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ) + 0.1  ))
```

0.4598979486

VZW der zweiten Ableitung von - zu +
=> WP mit Rechts- Links-Krümmung
an der Stelle x_w_1 = - ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) .

```
float(g''(+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ) - 0.1 ))
```

0.4598979486

```
float(g''(+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ) + 0.1  ))
```

-0.5198979486

VZW der zweiten Ableitung von + zu -
=> WP mit Links-Rechts-Krümmung
an der Stelle x_w_2 = + ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) .

2.Vorgehensweise:

x_w_1 = - ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. - 0,816

```
float(g'''(- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ) ))
```

4.898979486

f'''(x) > 0 (positiv)
=> TP der ***ersten Ableitung g'***
=> WP mit Rechts-Links-Krümmung der ***Originalfunktion g***
an der Stelle x_w_1 = - ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. - 0,816.

---

x_w_2 = + ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. + 0,816

```
float(g'''(+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ) ))
```

-4.898979486

f'''(x) < 0 (negativ)
=> HP der ***ersten Ableitung g***
=> WP mit Links-Rechts-Krümmung der ***Originalfunktion g***

an der Stelle x_w_2 = + ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. + 0,816.

an der Stelle x_w_2 = + ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. + 0,816.

(Falls f'''(x)= 0 -> SP!!)

Ermitteln des y-Wertes der Wendestelle mit Hilfe der Originalfunktion g:
x_w_1 = - ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. - 0,816
in g(x) einsetzen:

```
g(- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ))
```

$$\frac{65}{36}$$

WP_1 bei (- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) I 65 / 36)

```
float(- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ));
float(g(- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 )))
```

-0.8164965809

1.805555556

WP_1 bei (ca. - 0,816 I ca. 1,81) .

---

x_w_2 = + ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. + 0,816
in g(x) einsetzen:

```
g(+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ))
```

$$\frac{65}{36}$$

WP_2 bei (+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) I 65 / 36)

```
float(+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 ));
float(g(+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 )))
```

0.8164965809

1.805555556

WP_2 bei (ca. + 0,816 I ca. 1,81) .

- -

8. Schritt: Monotonie-Intervalle:
Aus *6. Schritt: Ermitteln der Extrempunkte* folgt mit
x_e_1 = - sqrt(2) = ca. - 1,414 => HP (VZW in f ' von + zu -)
x_e_2 = 0 => TP (VZW in f ' von - zu +) und
x_e_3 = + sqrt(2) = ca. + 1,414 => HP (VZW in f ' von + zu -) ,
dass es insgesamt *vier verschiedene* Monotonieintervalle geben muss:

dass es insgesamt *vier verschiedene* Monotonieintervalle geben muss:

I: (- unendlich; ca. - 1,414) : G_f streng monoton steigend (f ' (x) > 0 <=> f ' positiv !!!)
II: (ca. - 1,414 ; 0) : G_f streng monoton fallend (f ' (x) < 0 <=> f ' negaitiv !!!)
IV: (0; ca. + 1,414) : G_f streng monoton steigend (f ' (x) > 0 <=> f ' positiv !!!)
V: (ca. + 1,414 ; + unendlich) : G_f streng monoton fallend (f ' (x) < 0 <=> f ' negaitiv !!!)

- -
Oft gerne als zusätzliche Information abgefragt:
9. Schritt: Wendetangente der zwei Wendepunkte:
Wir wissen:
*WP_1 mit Rechts-Links-Krümmung der ***Originalfunktion g*** an der Stelle x_w_1 = - ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. - 0,816.
*WP_2 mit Links-Rechts-Krümmung der ***Originalfunktion g*** an der Stelle x_w_2 = + ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) = ca. + 0,816.

Für den WP_1 bei (- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) I 65 / 36):

Für die Tangentengleichung benötigen wir:
*Steigung m_1
*Y-Achsenabschnitt b_1:

```
x_w_1:=- ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 );
y_w_1:= 65 / 36 ;
m_1:=g'(x_w_1)
```

$$-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{65}{36}$$

$$-\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{9}$$

```
float(m_1)
```

$$-1.088662108$$

Einsetzen von den gefundenen Werten
in die Tangentengleichung
"t: y= m*x + b "

```
b_1:=solve(y_w_1 = m_1 * x_w_1 + b ,b)
```


$$\left\{\frac{11}{12}\right\}$$

$$\left\{\frac{11}{12}\right\}$$

```
float(b_1)
```

$$\{0.9166666667\}$$

Daraus folgt die Tangentenfunktionsgleichung:

```
t:=x->m*x+b
```

$$x \rightarrow m \cdot x + b$$

mit

```
t_w_1:=x->(-(4/9*sqrt(2)*sqrt(3))*x + 11/12)
```

$$x \rightarrow \frac{11}{12} - \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{9} \cdot x$$

Für den WP_2 bei (+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3) I 65 / 36):

Für die Tangentengleichung benötigen wir:
*Steigung m_2
*Y-Achsenabschitt b_2:

```
x_w_2:=+ ((sqrt(2) * sqrt(3))/ 3 );
y_w_2:= 65 / 36 ;
m_2:=g'(x_w_2)
```

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{65}{36}$$

$$\frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{9}$$

```
float(m_2)
```

$$1.088662108$$

Einsetzen von den gefundenen Werten
in die Tangentengleichung

in die Tangentengleichung
"t: y= m*x + b "

```
b_2:=solve(y_w_2= m_2 * x_w_2 + b ,b)
```

$$\left\{\frac{11}{12}\right\}$$

```
float(b_2)
```

$$\{0.9166666667\}$$

Daraus folgt die Tangentenfunktionsgleichung:

```
t:=x->m*x+b
```

$$x \rightarrow m \cdot x + b$$

mit

```
t_w_2:=x->(+(4/9*sqrt(2)*sqrt(3))*x + 11/12)
```

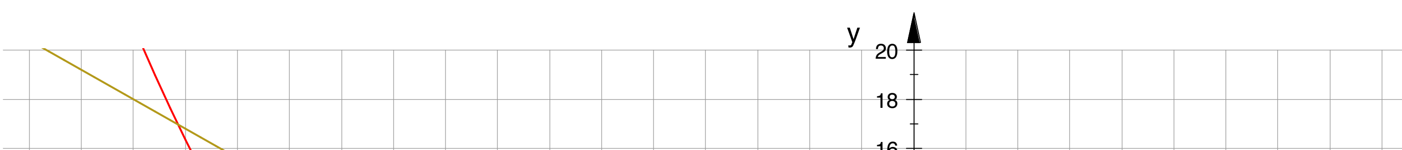
$$x \rightarrow \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{9} \cdot x + \frac{11}{12}$$

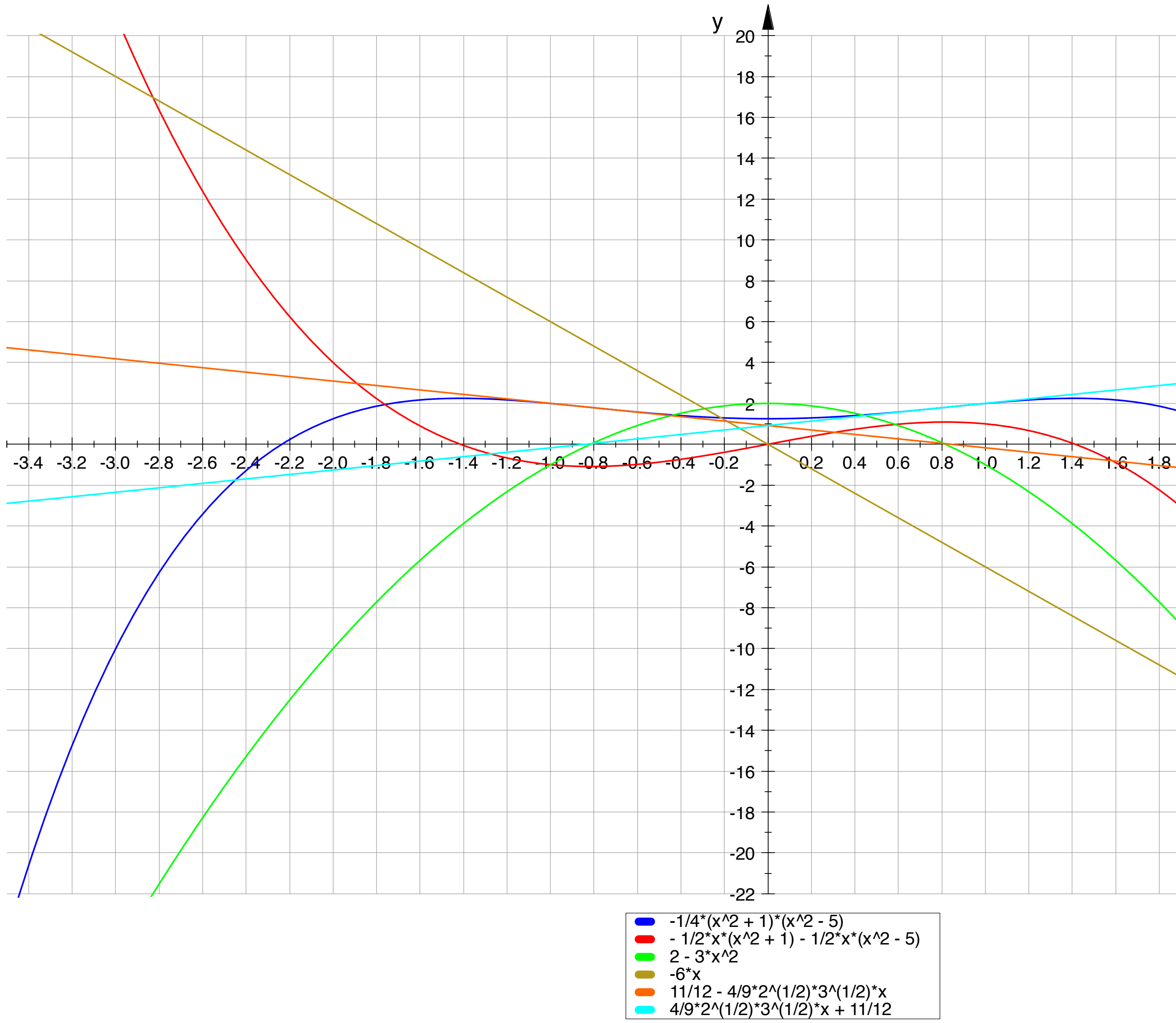
- -

10. Schritt: Graphen zeichnen (g, g', g'' und g'''), wenn vorhanden auch Wendetangenten t_w_1 und t_w_2:

SO:

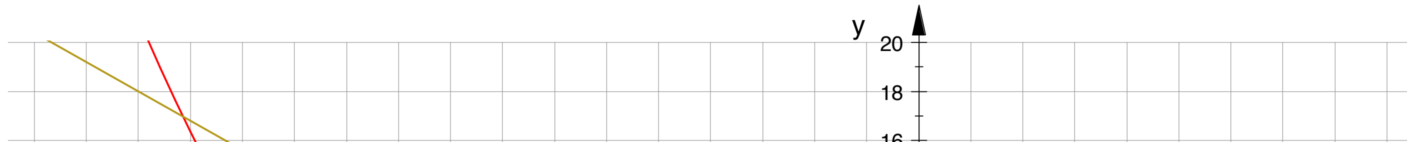
```
plotfunc2d(g(x),g'(x),g''(x),g'''(x), t_w_1(x), t_w_2(x), x=-3.5..3.5,YRar
```

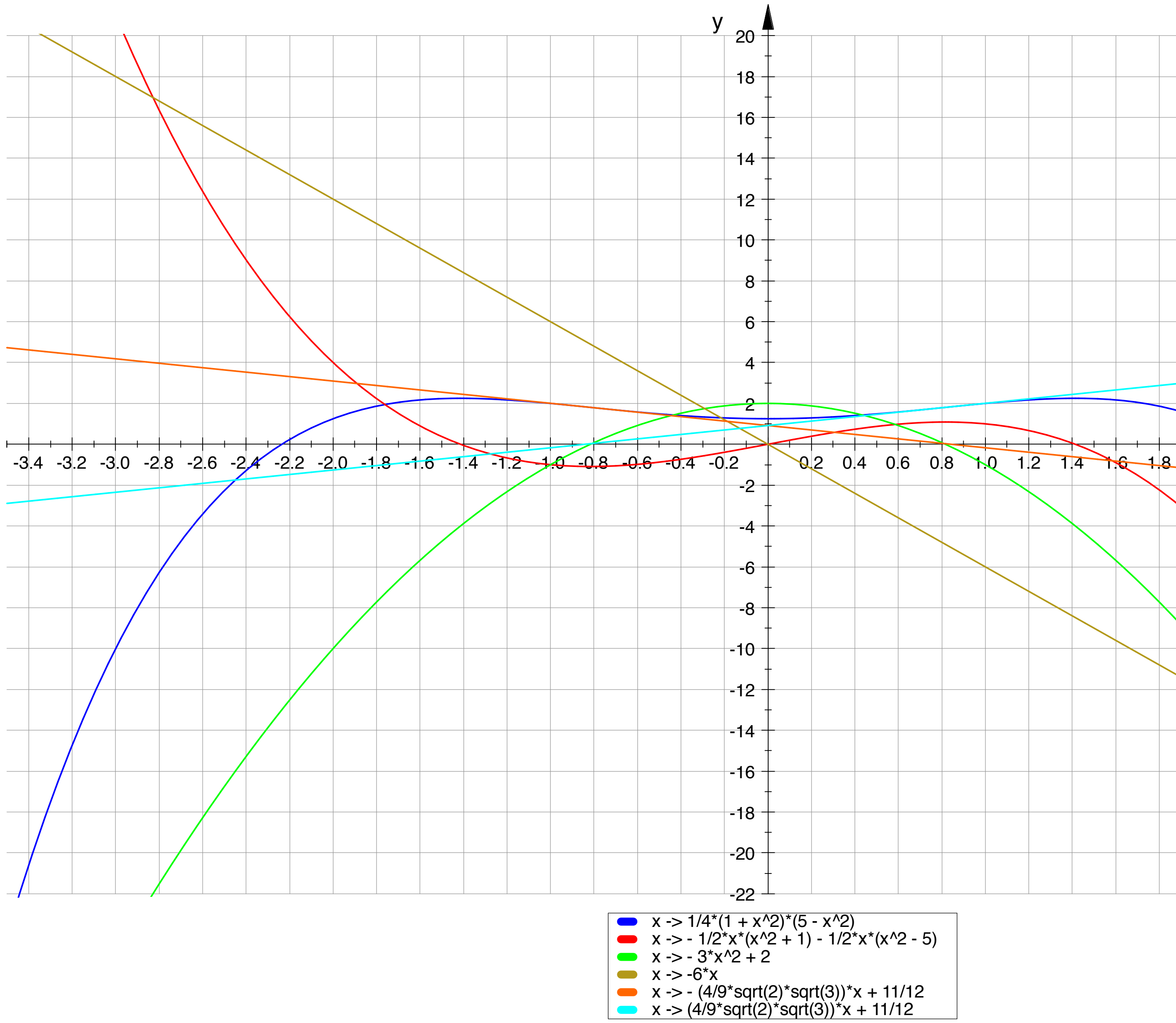





oder SO:

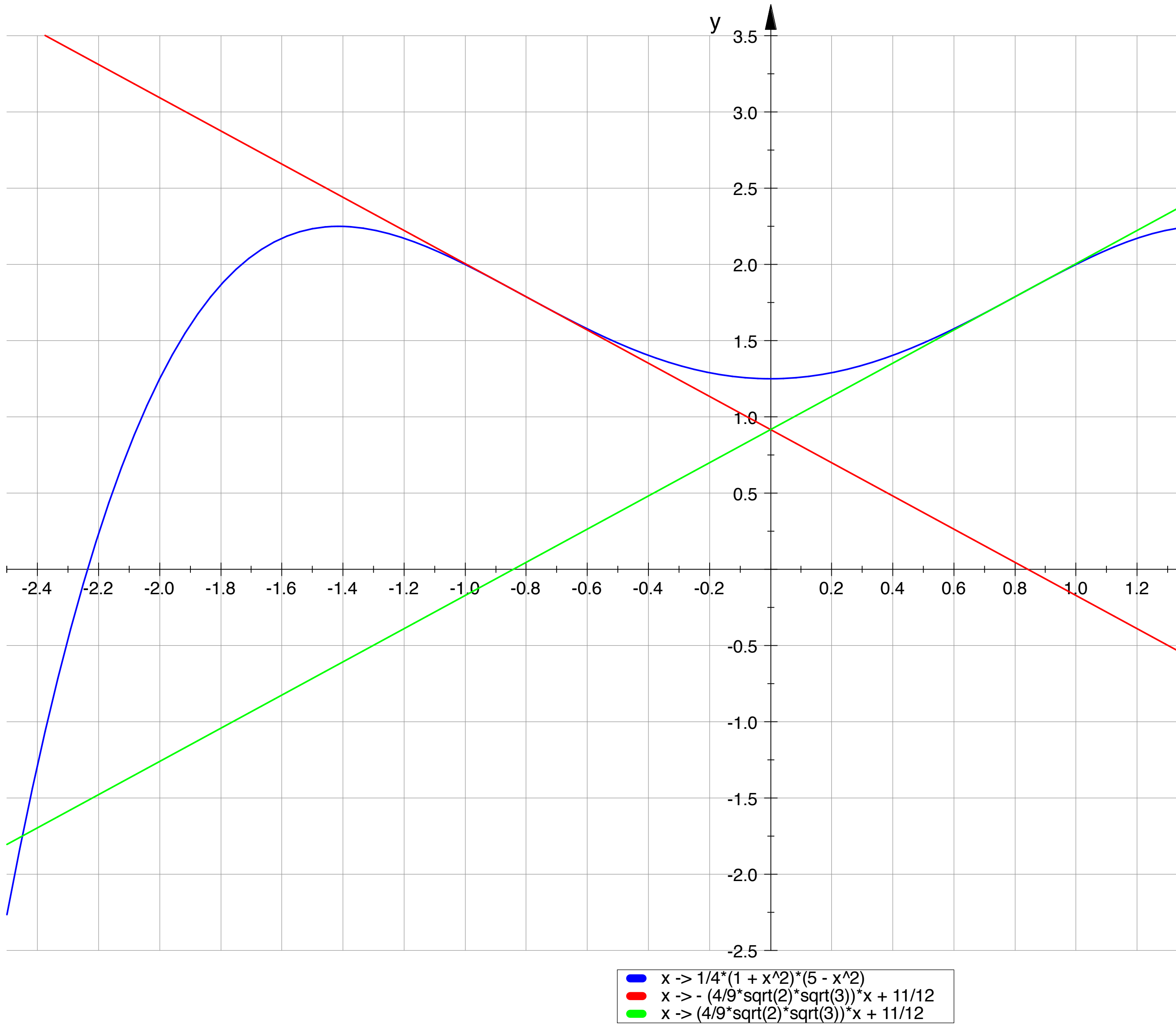
```
plotfunc2d(g,g',g'',g''', t_w_1, t_w_2, x=-3.5..3.5,YRange=-22..20
```



Detailausschnitt wegen der Wendepunkte und der Wendetangenten:

```
plotfunc2d(g,    t_w_1,    t_w_2,    x=-2.5..2.5,YRange=-2.5..3.5,
GridVisible=TRUE)
```



y
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-2.4
-2.2
-2.0
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
x -> 1/4*(1 + x^2)*(5 - x^2)
x -> - (4/9*sqrt(2)*sqrt(3))*x + 11/12
x -> (4/9*sqrt(2)*sqrt(3))*x + 11/12