Lösungen zu Aufgabenblatt 4

Ganzrationale Funktionen
Alle Aufgaben mit reelen Zahlen!!

```
assume(Type::Real)
```

$$\mathbb{R}$$

Aufgabe 1:

a) Die angegebene Funktion ist eine ganzrationale Funktion, da die Summanden in dem Funktionsterm alle aus Produkten mit Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten bestehen.
Dieses gilt auch für: b) und e).

c) Die angegebene Funktion ist keine ganzrationale Funktion, da der Summand "2*sqrt(x)" ein Wurzelterm ist und somit der Exponent in Potenzschreibweise "1/2" wäre. Dieser Exponenten ist kein natürlicher Exponent.
dieses gilt analog ("auf gleicher Weise") für f).

d) Die angegebene Funktion ist keine ganzrationale Funktion, da der Summand " 3/x " ein Quotient ist, in dem die Variable im Nenner steht. Somit ist der Exponent der Variablen in Potenzschreibweise "-1". Dieser Exponenten ist kein natürlicher Exponent.

Aufgabe 2:

```
f:=x->-3*x^5+3*x^2-x^3;
g:=x->-0.5*(x+2)^2*(x-1)^3*(x-4);
h:=x->4*x^4-26*x^2+6.25;
```

$$x \to 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x^5 - x^3$$

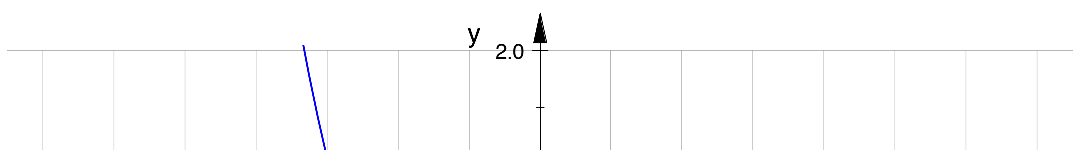
$$x \to -0.5 \cdot (x+2)^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x-4)$$

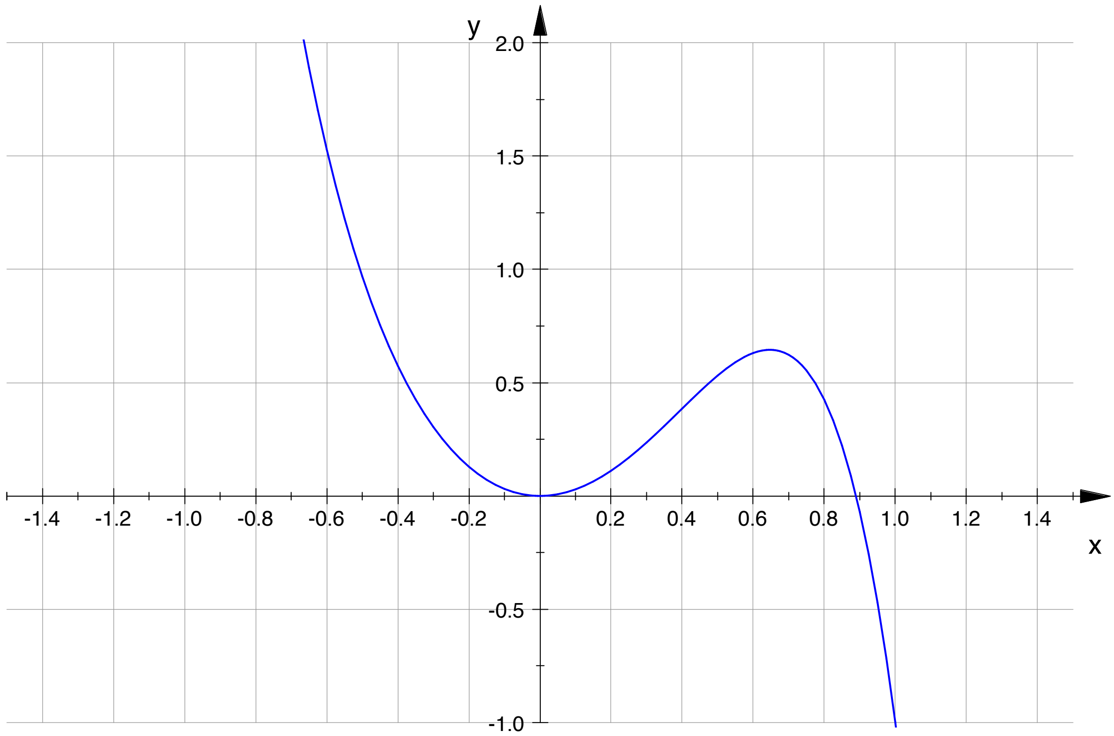
$$x \to 4 \cdot x^4 - 26 \cdot x^2 + 6.25$$

----
a)

```
plotfunc2d(f(x),x=-1.5..1.5,YRange=-1..2, GridVisible=TRUE)
```

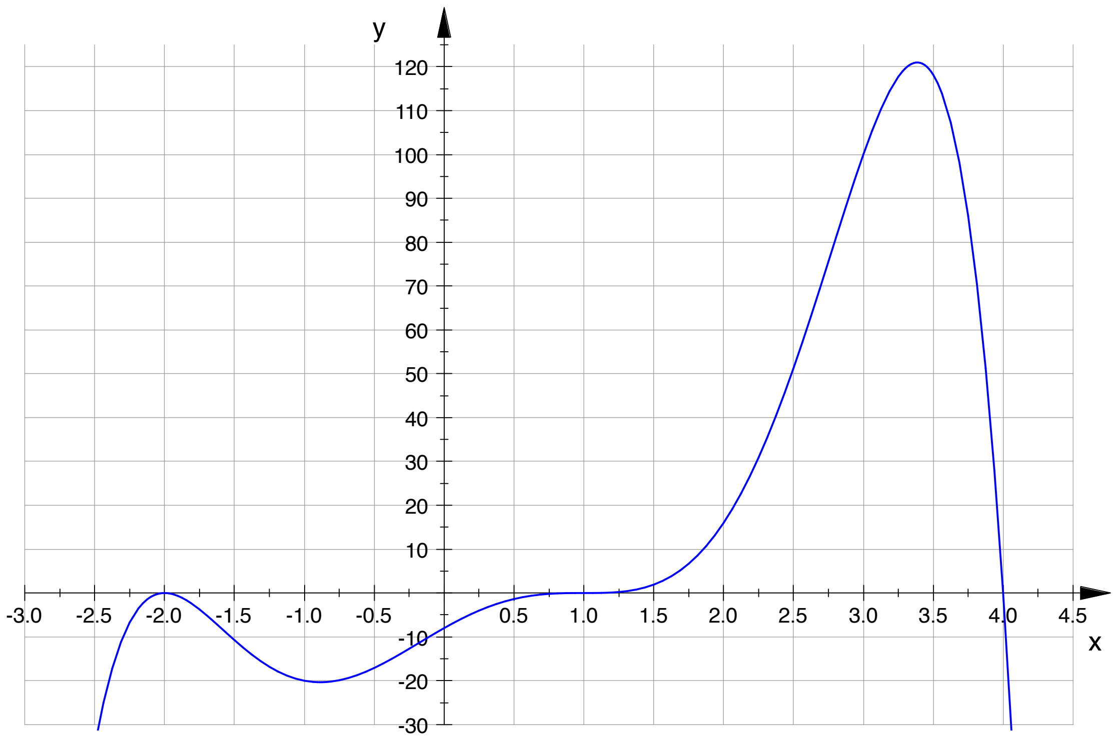
1



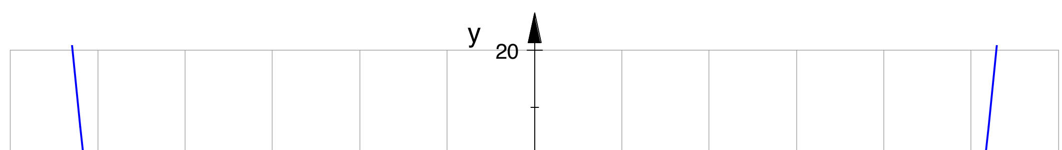


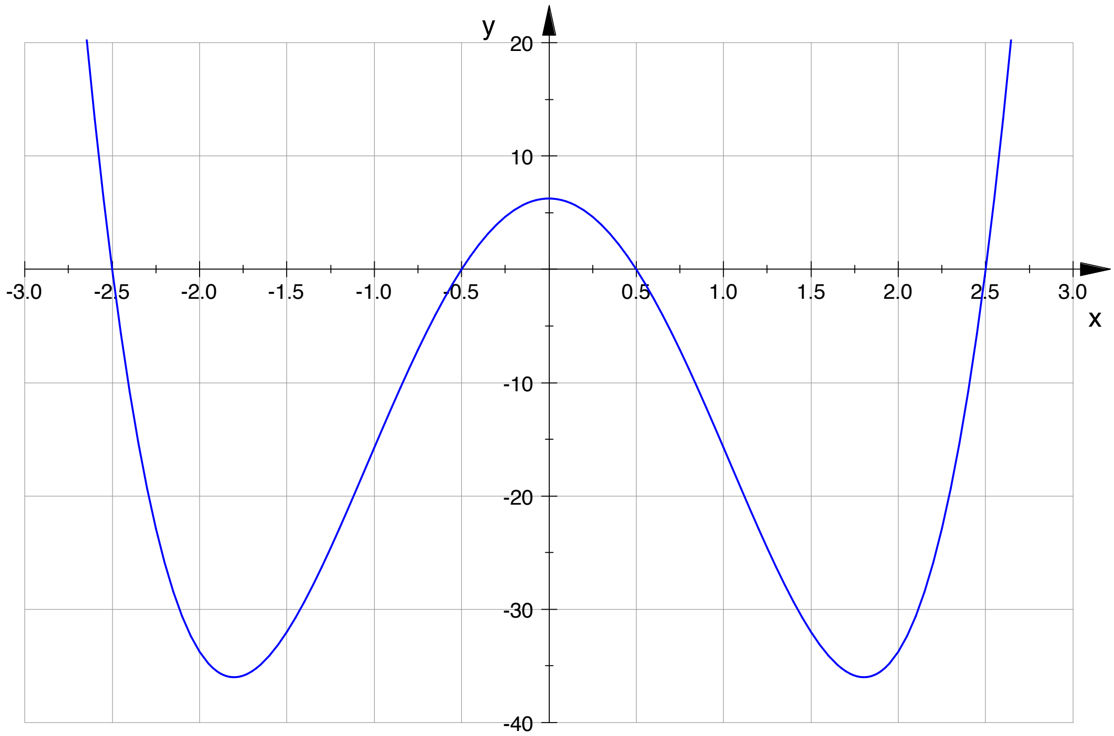
Hier kein "Scaling=Constrained", da die Y-Achse schon für kleine x-Stellen zu große Funktionswerte besitzt und damit der Graph nicht mehr gut abliesbar werden würde.

```
plotfunc2d(g(x),x=-3..4.5, YRange=-30..125,GridVisible=TRUE)
```




```
plotfunc2d(h(x),x=-3..3, YRange=-40..20,GridVisible=TRUE)
```
2





----

b)

```
expand(g(x))
```

$$-0.5\cdot x^{6}+1.5\cdot x^{5}+4.5\cdot x^{4}-9.5\cdot x^{3}-6.0\cdot x^{2}+18.0\cdot x-8.0$$

----

c)

Funktion f:

```
f(-0.5);            // Funktionswert für x= -0.5
f(0);               // Schnitt mit der y-Achse <=> x=0
solve(f(x)=0,x);    // Nullstelle <=> f(x)=0
solve(f(x)=5,x);        //    x-Stelle    berechnen    bei    gegebenen
Funktionswert <=> f(x)= 5
```

0.96875

0

$$\mathbb{R}\cap\left(\{0\}\cup\mathrm{RootOf}\left(X3^{3}+\frac{X3}{3}-1,\ X3\right)\right)$$

$$\mathbb{R}\cap\mathrm{RootOf}\left(X4^{5}+\frac{X4^{3}}{3}-X4^{2}+\frac{5}{3},\ X4\right)$$

$$\mathbb{R} \cap \operatorname{RootOf}\left(X4^5 + \frac{X4^3}{3} - X4^2 + \frac{5}{3}, X4\right)$$

Die Berechnung der Stellen wiederholen wir mit dem "float"-Befehl um den "solve"-Befehl herum:

```
float(solve(f(x)=0,x));  // Nullstelle <=> f(x)=0
float(solve(f(x)=5,x));    //  x-Stelle  berechnen  bei  gegebenen
Funktionswert <=> f(x)= 5
```

$\{0.0, 0.8893959919\}$

$\{-0.9039106388\}$

Es gibt damit zwei NST: x_1 = 0 und x_2 = ca. 0,89.
Die Koordinaten des Punktes mit dem Funktionswert y=5 lauten: P(ca. -0,9 I 5) .

\- - - - -
Funktion g:

```
g(-0.5);           // Funktionswert für x= -0.5
g(0);              // Schnitt mit der y-Achse <=> x=0
solve(g(x)=0,x);   // Nullstelle <=> f(x)=0
solve(g(x)=5,x);       //   x-Stelle   berechnen   bei   gegebenen
Funktionswert <=> f(x)= 5
```

-17.0859375

-8.0

$\{-2, 1, 4\}$

$\{1.682697622, 3.989567607\}$

Es gibt damit drei NST: x_1 = -2, x_2 = 1 und x_3 = 4.
Die Koordinaten der Punkte mit dem Funktionswert y=5 lauten: P_1(ca. 1,68 I 5) und P_2(ca. 3,99 I 5).

\- - - - -
Funktion h:

```
h(-0.5);           // Funktionswert für x= -0.5
h(0);              // Schnitt mit der y-Achse <=> x=0
solve(h(x)=0,x);   // Nullstelle <=> f(x)=0
solve(h(x)=5,x);       //   x-Stelle   berechnen   bei   gegebenen
Funktionswert <=> f(x)= 5
```


0.0

0.0

6.25

$\{-2.5, -0.5, 0.5, 2.5\}$

$\{-2.539992543, -0.220086077, 0.220086077, 2.539992543\}$

Es gibt damit vier NST: x_1 = -2,5, x_2 = -0,5, x_3 = 0,5 und x_3 = 2,5 .
Die Koordinaten der Punkte mit dem Funktionswert y=5 lauten: P_1(ca. -2,54 I 5), P_2(ca. -0,22 I 5), P_3(ca. +0,22 I 5) und P_4(ca. +2,54 I 5).

----
e)

```
f(-2);
f(2);
f(0.5);
```

116

-92

0.53125

Der zweite Punkt Q liegt auf dem Graphen von f, da der x-Stelle 2 der Funktionswert -92, wie in den Koordinaten von Q gefordert, zugeordnetet ist.
Alle anderen Punkte liegen nicht auf dem Graphen, da die Koordinaten nicht mit den Funktionswerten zu der gegebenen Stelle passen.

```
g(-2);
g(2);
g(0.5);
```

0

16.0

-1.3671875

Der erste Punkt P liegt auf dem Graphen von f, da der x-Stelle - 2 der Funktionswert 0 ("Nullstelle"), wie in den Koordinaten von P gefordert, zugeordnetet ist.
Alle anderen Punkte liegen nicht auf dem Graphen, da die Koordinaten nicht mit den Funktionswerten zu der gegebenen Stelle passen.

```
h(-2);
```

```
h(-2);
h(2);
h(0.5);
```

−33.75

−33.75

0.0

Alle Punkte liegen nicht auf dem Graphen, da die Koordinaten nicht mit den Funktionswerten zu der gegebenen Stelle passen.

----
f)
Nutzen Sie dabei auch folgende MuPad-Aufrufe:
[bool(f(x) = f(-x)); //Achsensymmetrie zur y-Achse überprüfen

[bool(f(x) = - f(-x)); //Punktsymmetrie zum Ursprung überprüfen

Funktion f:

```
bool(f(x)=f(-x));   //Achsensymmetrie zur y-Achse überprüfen
```

FALSE

Es liegt keine Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

```
bool(f(x)=-f(-x)); //Punktsymmetrie zum Ursprung überprüfen
```

FALSE

Es liegt keine Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

Funktion g:

```
bool(g(x)=g(-x));   //Achsensymmetrie zur y-Achse überprüfen
```

FALSE

Es liegt keine Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

```
bool(g(x)=-g(-x)); //Punktsymmetrie zum Ursprung überprüfen
```

FALSE

Es liegt keine Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

Funktion h:

```
bool(h(x)=h(-x));   //Achsensymmetrie zur y-Achse überprüfen
```

```
bool(h(x)=h(-x));    //Achsensymmetrie zur y-Achse überprüfen
```

TRUE

Es liegt **eine** Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

```
bool(h(x)=-h(-x)); //Punktsymmetrie zum Ursprung überprüfen
```

FALSE

Es liegt keine Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

----
g)
Funktion f:

```
limit(f(x),x= - infinity);
```

∞

Für große *negative* Zahlen kommt der Funktionsgraph aus dem IV. Quadranten in das Diagramm hinein ("Von links oben"!).
Wir sagen:
"Für x gegen - *unendlich* strebt f(x) gegen + unendlich."

```
limit(f(x),x= + infinity);
```

$-\infty$

Für große *positive* Zahlen läuft der Funktionsgraph über dem III. Quadranten in das Diagramm hinaus ("Nach rechts unten"!).
Wir sagen:
"Für x gegen + *unendlich* strebt f(x) gegen - unendlich."

Funktion g:

```
limit(g(x),x= - infinity);
```

– RD_INF

Da der Term der Funktion schon sehr komplex ist, kommt es hier zu einem besonderen Ergebnis. Da nur das Vorzeichen wichtig ist, gilt: "NICHT BANGE MACHEN LASSEN!" .

Für große *negative* Zahlen kommt der Funktionsgraph aus dem IV. Quadranten in das Diagramm hinein ("Von links unten!).
Wir sagen:
"Für x gegen - *unendlich* strebt g(x) gegen - unendlich."

```
limit(g(x),x= + infinity);
```

– RD_INF

Für große *positive* Zahlen läuft der Funktionsgraph über dem III. Quadranten in das Diagramm hinaus ("Nach rechts unten"!).
Wir sagen:
"Für x gegen + *unendlich* strebt g(x) gegen - unendlich."

Funktion h:

Funktion h:

```
limit(h(x),x= - infinity);
```

RD_INF

Für große *negative* Zahlen kommt der Funktionsgraph aus dem IV. Quadranten in das Diagramm hinein ("Von links oben"!).
Wir sagen:
"Für x gegen - *unendlich* strebt h(x) gegen + unendlich."

```
limit(h(x),x= + infinity);
```

RD_INF

Für große *positive* Zahlen läuft der Funktionsgraph über dem III. Quadranten in das Diagramm hinaus ("Nach rechts unten"!).
Wir sagen:
"Für x gegen + *unendlich* strebt h(x) gegen - unendlich."

----
h)
Grundsätzlich gilt für die Schnittpunktbestimmung:
"Gleichsetzen der Funktionsterme und
Gleichung nach x lösen"

Zunächst müssen wir die neue Funktion i(x) definieren:

```
i:=x->- 3 * x^2 + 5;
```

$$x \rightarrow 5 - 3 \cdot x^{2}$$

Funktion f:

```
solve(f(x)=i(x), x)
```

$$\mathbb{R} \cap \mathrm{RootOf}\left(X6^{5} + \frac{X6^{3}}{3} - 2 \cdot X6^{2} + \frac{5}{3}, X6\right)$$

Bei einer solchen Lösung mit dem "float"-Befehl arbeiten:

```
float(solve(f(x)=i(x), x))
```

$\{-0.7805311032\}$

Das ist die Schnittstelle.
Wir müssen noch die y-Koordinaten für den Schnittpunkt bestimmen:

Wenn man den exakten Wert der Stelle übertragen will, geht es hier nur einer Lösungsmenge "Liste" der Ergebnisse:

Definieren der Lösungsmenge "Liste":

Definieren der Lösungsmenge "Liste":

```
Liste:=float(solve(f(x)=i(x), x))
```

$\{-0.7805311032\}$

Wenn man nun das erste Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[1];
f(Liste[1]);
```

-0.7805311032

3.172313591

Damit liegt der Schnittpunkt S auf S(ca. - 0,78 I ca. 3,17) .

Funktion g:

```
solve(g(x)=i(x), x)
```

$\{-2.310189023, -1.73745838, 1.258227127, 4.083023458\}$

Das sind die Schnittstellen.
Wir müssen noch die y-Koordinaten für die Schnittpunkte bestimmen:

Wenn man den exakten Wert der Stelle übertragen will, geht es hier nur einer Lösungsmenge "Liste" der Ergebnisse:

Definieren der Lösungsmenge "Liste":

```
Liste:=float(solve(g(x)=i(x), x))
```

$\{-2.310189023, -1.73745838, 1.258227127, 4.083023458\}$

Wenn man nun das erste Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[1];
g(Liste[1]);
```

-2.310189023

-11.01091997

Damit liegt der erste Schnittpunkt S_1 auf
S_1(ca. - 2,31 I ca. -11,01) .
- - - - -

Wenn man nun das zweite Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[2];
```

```
Liste[2];
g(Liste[2]);
```

-1.73745838

-4.056284871

Damit liegt der zweite Schnittpunkt S_2 auf
S_1(ca. - 1,74 I ca. -4,06) .

- - - - -
Wenn man nun das dritte Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[3];
g(Liste[3]);
```

1.258227127

0.2505934883

Damit liegt der dritte Schnittpunkt S_3 auf
S_3(ca. 1,26 I ca. -0,25) .

- - - - -
Wenn man nun das vierte Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[4];
g(Liste[4]);
```

4.083023458

-45.01324167

Damit liegt der vierte Schnittpunkt S_4 auf
S_4(ca. 4,08 I ca. -45,01) .

Funktion h:

```
solve(h(x)=i(x), x)
```

$\{-2.386446845,\ -0.2342465727,\ 0.2342465727,\ 2.386446845\}$

Das sind die Schnittstellen.
Wir müssen noch die y-Koordinaten für die Schnittpunkte bestimmen:

Wenn man den exakten Wert der Stelle übertragen will, geht es hier nur einer Lösungsmenge "Liste" der Ergebnisse:

Definieren der Lösungsmenge "Liste":

```
Liste:=float(solve(h(x)=i(x), x))
```

$\{-2.386446845,\ -0.2342465727,\ 0.2342465727,\ 2.386446845\}$

```
{-2.386446845, -0.2342465727, 0.2342465727, 2.386446845}
```

Wenn man nun das erste Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[1];
h(Liste[1]);

-2.386446845

-12.08538563
```

Damit liegt der erste Schnittpunkt S_1 auf
S_1(ca. - 2,38 I ca. -12,09) .
- - - - -
Wenn man nun das zweite Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[2];
h(Liste[2]);

-0.2342465727

4.83538563
```

Damit liegt der zweite Schnittpunkt S_2 auf
S_1(ca. - 0,23 I ca. -4,84) .

- - - - -
Wenn man nun das dritte Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[3];
h(Liste[3]);

0.2342465727

4.83538563
```

Damit liegt der dritte Schnittpunkt S_3 auf
S_3(ca. 0,23 I ca. 4,84) .

- - - - -
Wenn man nun das vierte Element der Lösungsmenge in die Funktion einsetzen will:

```
Liste[4];
h(Liste[4]);

2.386446845

-12.08538563
```

Damit liegt der vierte Schnittpunkt S_4 auf
S_4(ca. 2,39 l ca. -12,09) .

Da der Graph von h(x) symmetrisch zur y-Achse ist, kann man auch nur die Punkte mit positiver x-Stelle bestimmen und dann die analog entstehenden negativer notieren.