Ganzrationale Funktionen

Sie sollen alle Aufgaben zunächst mit MuPad lösen.

In einer weiteren Runde, *nach dem Besprechen der Vorgehensweise*, werden Sie auch handschriftliche Lösungen bestimmen.

Überprüfen Sie alle Rechnungen mit einem Graphen per MuPad (!), deren Achsen so von ihnen festgelegt werden, dass alle wichtigen Punkte und die „Ränder" der Graphen gut sichtbar sind. Nutzen Sie im Bedarfsfall auch die gleiche Skalierung und die Gitterlinien, um zum Beispiel Punkte ablesen zu können.

Benutzen Sie für alle Berechnungen den reelen Zahlenraum.

Wichtige MuPad-Aufrufe:

***bool(**<Gleichung>**)** : Überprüfen eines Wahrheitswertes, wird bei Symmetrie eingesetzt

***expand(**<Term>**)** : Ausmultiplizieren eines Terms mit Faktoren, wird zum Beispiel bei Aufgabe 2 für die Funktion g(x) benötigt, um den Funktionsterm umzuformen

limit(**<Funktion>, **x=** *- infinity)** bzw. **limit(**<Funktion>**, x=** *+ infinity***)** :

Überprüfen des Verlaufs einer Funktion an ihren Definitions"rändern", sprich:

Wenn wir für x *sehr große negative* Zahlen einsetzen, von wo gelangt der Graph in den Diagrammbereich hinein?

=> III. oder IV. Quadrant? …

Wenn wir für x *sehr große positive* Zahlen einsetzen, von wo gelangt der Graph in den Diagrammbereich hinein?

=> I. oder II. Quadrant? ...

Aufgabe 1: LS E, S. 29 / 1

Entscheiden Sie, ob f ganzrational ist.

Geben Sie für diesen Fall den Grad und die Vorfaktoren („Koeffizienten":

$a_n, a_n{-}1, a_n{-}2, \ldots, a_0$) an.

a) $f(x) = x^3 - x + 7$

b) $f(x) = 1 + \sqrt{2} \cdot x$

c) $f(x) = 1 + 2 \cdot \sqrt{x}$

d) $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x}$

e) $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{3}$

f) $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen:

$$f(x) = -3x^5 + 3x^2 - x^3$$

$$g(x) = -0{,}5\,(x+2)^2\,(x-1)^3\,(x-4) \qquad \text{und}$$

$$h(x) = 4x^4 - 26x^2 + 6{,}25$$

a) Zeichnen Sie die Funktionen jeweils in einen eigenes <u>*geeignetes*</u> Koordinatensystem. Wählen Sie dabei den Ausschnitt von ID und IW so, dass der Funktionsverlauf für die wichtigsten Punkte (siehe d)) gut erkennbar wird.
Tipp:
Fangen Sie zunächst nur mit der Funktion ohne Angabe des Bereiches für di x-Achse bzw. y-Achse an und optimieren Sie anschließend .

b) Formen Sie die Funktionsgleich von g(x) in eine „allgemeine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion“ um.

c) Geben Sie jeweils an:

(i) den Grad der Funktion n ,

(ii) den Vorfaktor („Koeffizient“) a_n der höchsten Potenz im Funktionsterm,

(iii) die Exponenten sämtlicher Potenzen im Funktionsterm.

d) Berechnen Sie

(i) den Funktionswert von x = -0.5,

(ii) den Schnitt mit der y-Achse,

(iii) die Nullstelle/n und

(iv) die x-Koordinate von y = 5 .

Vergleichen Sie ihr berechnetes Ergebnis mit dem entsprechenden Punkt auf dem Graphen.
Welche Besonderheit tritt bei der Funktion g und h bzgl. der Nullstellen im Vergleich mit dem gegebenen Funktionsterm auf?

e) Untersuchen Sie, auf welchem Graphen der jeweils angegebene Punkt liegt:
P(- 2 | 0), Q(2 | - 92) und R(0,5 | - 0,75) „*Punktprobe*“
durch Ablesen auf dem Graphen ***und*** durch Berechnung.
Tipp:
Zum Ablesen der Funktionswerte am Graph in MuPad ist es unter Umständen nützlich, nur den Bereich um den zu betrachtenden Punkt zeichnen zu lassen („Zoomen“!).
Verwenden Sie dabei auch die „GridVisible=TRUE“ - Einstellung des plot-Befehls.

f) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie.
Nutzen Sie dabei auch folgende MuPad-Aufrufe:
[bool(f(x) = f(-x)); //Achsensymmetrie zur y-Achse überprüfen
[bool(f(x) = - f(-x)); //Punktsymmetrie zum Ursprung überprüfen

g) Untersuchen Sie den Verlauf des Funktionsgraphs bzgl. großer Zahlen.
Nutzen Sie dabei auch folgende MuPad-Aufrufe:
[limit(<Funktion>, **x=** <u>*- infinity*</u>**)** *//für x werden große <u>negative</u> Zahlen eingesetzt*
[limit(<Funktion>**, x=** <u>*+ infinity*</u>**)** *//für x werden große <u>positive</u> Zahlen eingesetzt*

h) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Funktion mit der quadrantischen Funktion

$$i(x) = -3x^2 + 5$$

Was fällt bei der Berechnung mit h(x) auf?
Kann man hier einen einfacheren Rechenweg nutzen?