Mathematik Stufe 11, Boll, Fischer Eichendorffschule 05/2009

Lösungen zu den Wochenplanaufgaben zu Wendestellen, Kurvendiskussion und Tangenten

1. Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) gemäß der im Buch auf der Seite 94/95 dargestellten Vorgehensweise durch für die Funktionen mit

a) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^3-4\cdot x^2+8\cdot x \text{ und } x\in\mathbb{R}$

b) $g(x)=\frac{1}{4}\cdot(1+x^2)\cdot(5-x^2) \text{ und } x\in\mathbb{R}$

a) Funktion und ihre Ableitungen

```
f:=x-> 1/2*x^3-4*x^2+8*x;
f';
f'';
```

$$x\to\frac{x^3}{2}-4\cdot x^2+8\cdot x$$

$$x\to\frac{3\cdot x^2}{2}-8\cdot x+8$$

$$x\to 3\cdot x-8$$

2. Symmetrie
f(x) hat sowohl gerade als auch ungerade Exponenten, daher besitzt er weder eine Punkt- noch eine Achsensymmetrie.

3. Nullstellen

```
solve(f(x)=0,x)
```

$$\{0, 4\}$$

Die Nullstellen liegen also bei x = 0 und x = 4

4. Verhalten für...

x-> +unendlich: da höchste Potenz x^3 mit positivenm Koeffizienten geht f(x) -> + unendlich
x->-unendlich: da höchste Potenz x^3 mit positivenm Koeffizienten geht f(x) -> - unendlich

```
limit(f(x),x=infinity);
limit(f(x),x=-infinity);
```

$$\infty$$

$$-\infty$$

Achtung: Die vorgherige Rechnung funktioniert nur, wenn in f keine Kommazahlen verwendet werden.

5. Extremstellen:
Prüfen der notwendigen Bdg. für Extremstellen

```
solve(f'(x)=0,x)
```

```
solve(f'(x)=0,x)
```

$$\left\{\frac{4}{3}, 4\right\}$$

An diesen Stellen wird eine hinreichende Bdg. geprüft.

```
f''(4/3);
f''(4);
```

$$-4$$

$$4$$

Es gilt: f'(4/3) = 0 und f''(4/3) < 0 -> in x = 4/3 liegt ein lokales Maximum
Es gilt: f'(4) = 0 und f''(4) > 0 -> in x = 4 liegt ein lokales Minimum

Um die Koordinaten des HP und TP zu bestimmen

```
f(4); f(4/3);
```

$$0$$

$$\frac{128}{27}$$

Es gilt also HP(4/3 I 128/27) und TP (4 I 0)

6. Wendestellen
Prüfen der notwendigen Bdg. für Wendestellen

```
solve (f''(x) = 0,x)
```

$$\left\{\frac{8}{3}\right\}$$

An diese Stelle wird eine hinreichende Bdg. geprüft.

```
f'''(8/3)
```

$$3$$

Es gilt: f''(8/3) = 0 und f'''(8/3) > 0 -> in x =8/3 liegt eine Wendestelle

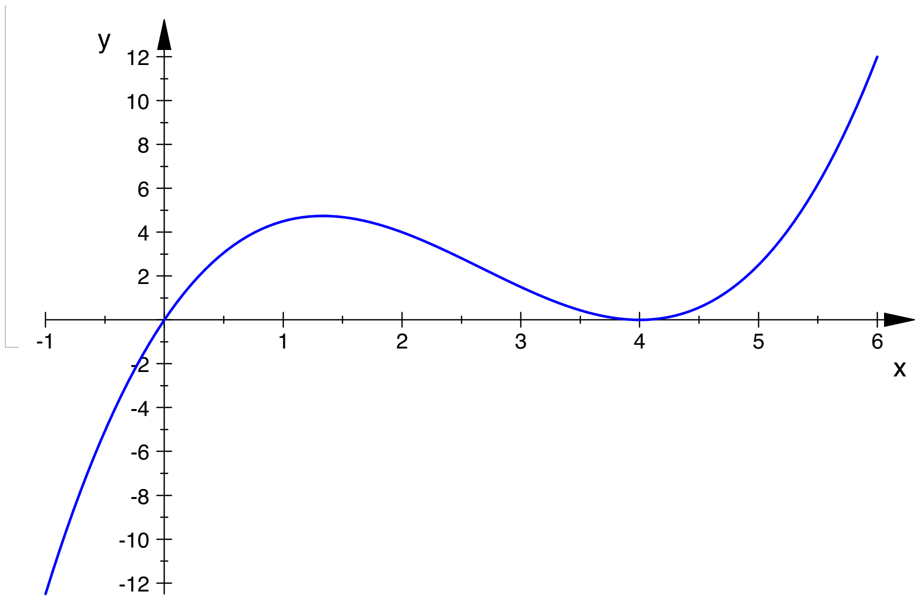
```
f(8/3)
```

$$\frac{64}{27}$$

mit W(8/3 I 64/27)

7. Graph der Funktion

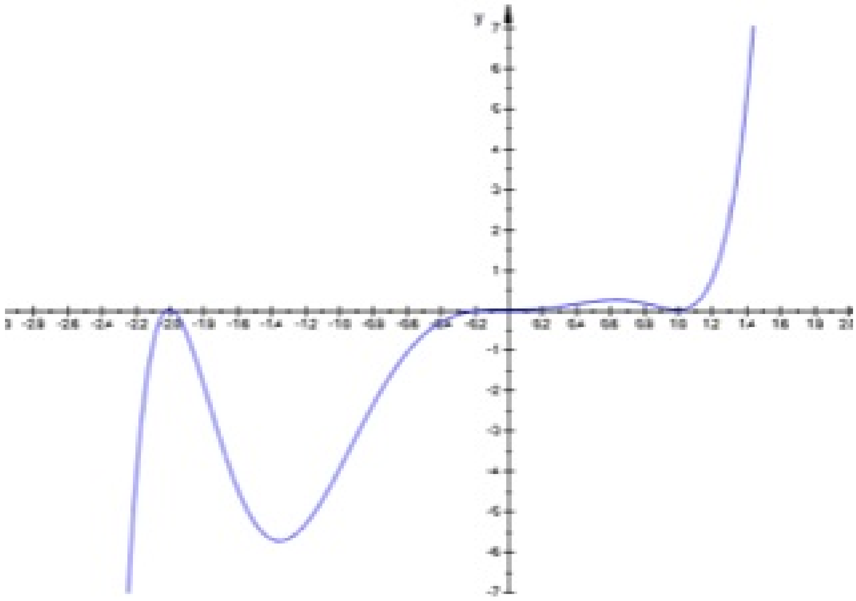
```
plotfunc2d(f(x), x= -1..6)
```

b)
Lösungen für die Teilaufgabe b) analog, Überprüfung der eigenen Arbeit über den Graphen

2 Aufgabe.

In der nebenstehenden Graphik ist der Graph der 1. Ableitung einer Funktion dargestellt.



a) An welchen Stellen muss der Graph der Originalfunktion Extremstellen besitzen. Entscheide und begründe, welcher Art diese Extremstellen sind?

VZW der 1. Ableitung bei x = 0, Übergang von - nach +, also ein lokales Minimum bei x=0.

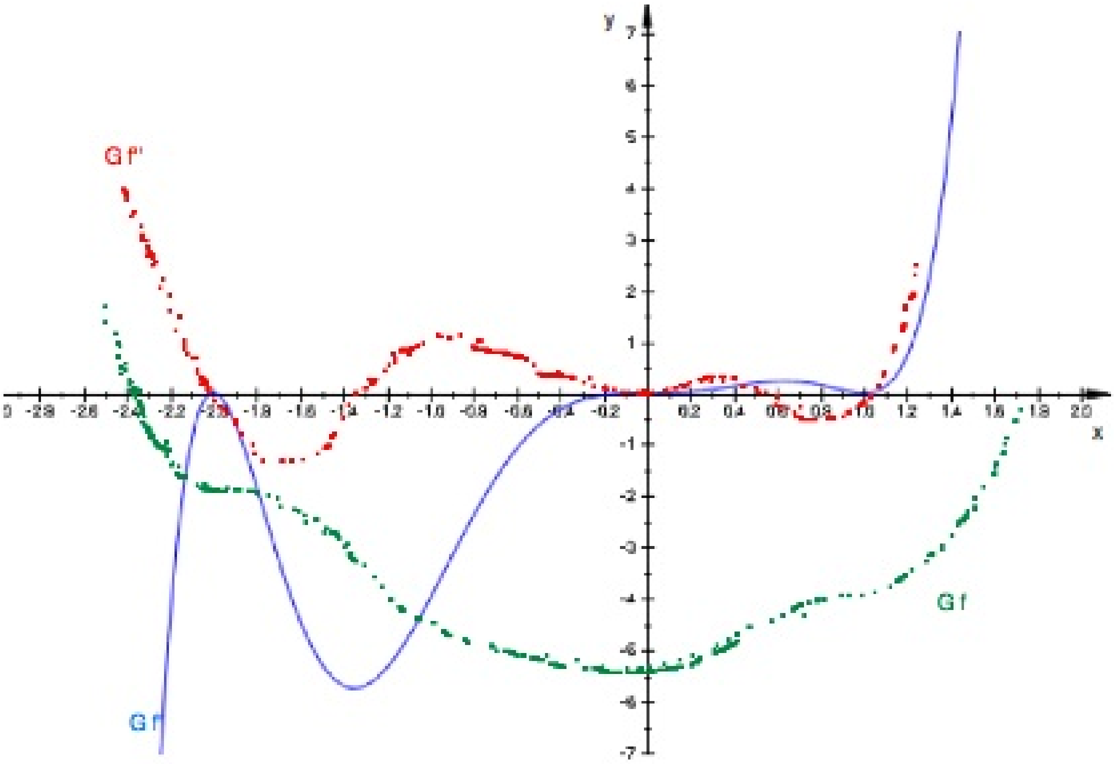
b) An welchen Stellen muss der Graph der Originalfunktion Wendestellen besitzen.

Extremstellen der 1. Ableitung bei x = -2, -1.4; 0.6; 1. Dort müssen also Wendestellen vorliegen.

c) In welchen Bereichen ist der Graph der Originalfunktion rechtsgekrümmt und wo linksgekrümmt?

Linkskrümmung wenn 2. Ableitung positiv ist. Dort steigt der Graph der 1. Abl.
-> $x < -2$; $-1.4 < x < 0.6$; $x > 1$
Rechtskrümmung wenn 2. Ableitung negativ ist. Dort fällt der Graph der 1. Abl.
-> $-2 < x < 1.4$; $0.6 < x < 1$

d) Skizziere in die Graphik einen möglichen Verlauf der Originalfunktion und den Graph der 2. Ableitungsfunktion.



3. Nimm durch begründete Beispiele oder Gegenbeispiele Stellung zu den folgenden Aussagen:
a) Wenn f''(xw) = 0 dann ist in xw eine Wendestelle einer differenzierbaren Funktion f
Falsch. Gegenbeispiel $f(x) = x^4$, x^6 haben bei x= 0 Nullselle der 2. Abl. aber keine Wendestelle

b) Wenn xw eine Wendestelle einer differenzierbaren Funktion ist dann gilt: f'(xw) ≠ 0.
Falsch. Gegenbeispiel $f(x) = x^3$, hat Wendestelle bei x= 0 und f'(0) = 0.

c) Die Wendestelle einer differenzierbaren Funktion f ist niemals auch eine Extremstelle von f
Wahr. Es gibt zwar Wendestellen mit waagrechter Tangente (Sattelpunkte wie bei x^3) aber das sind keine Extremstellen.

d) Wenn f''(xw) = 0 und f'' einen Vorzeichenwechsel in xw durchführt dann ist in xw eine Wendestelle einer differenzierbaren Funktion f
Wahr. Ist genau eine hinreichend Bedingung ür Wendestellen. Beispiel $f(x) = x^{3,}$ f''(x) = 6x macht in x= 0 einen VZW.

4. Aufgabe
Welche Beziehung muss für die Koeffizienten der Funktion f mit
$$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \; und \; x \in \mathbb{R}, b, c, d \in \mathbb{R}$$
gelten, damit der Graph von f zwei, genau eine bzw. keine waagrechte Tangente hat .

Wenn eine waagrechte Tangente vorliegt, dann mus f'(x) = 0 sein. Wir suchen also die

Stellen x fr die diese Bedingung bei der gegebenen Funktion erfüllt ist.

```
f := x-> x^3 + b*x^2 + c*x +d;
f';
```

$$x \to x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$x \to 3 \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

Der Graph von f' ist eine Parabel und gesucht sind die Nullstellen dieser Parabel.

```
solve(f'(x)=0,x)
```

$$\left\{ -\frac{b}{3} - \frac{\sqrt{b^2 - 3 \cdot c}}{3}, \frac{\sqrt{b^2 - 3 \cdot c}}{3} - \frac{b}{3} \right\}$$

Das Argument in der Wurzel entscheidet :
b^2 -3c = 0 -> eine Lösung x = -b/3
b^2 -3c > 0 -> zwei Lösungen x = -b/3 + Wurzel und x = -b/3 - Wurzel
b^2 -3c < 0 -> keine Lösung da aus negativen Zahlen keine Wurzeln gezogen werden können

5. Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x)=4 \cdot x^3+6 \; und \; x \in \mathbb{R}$.

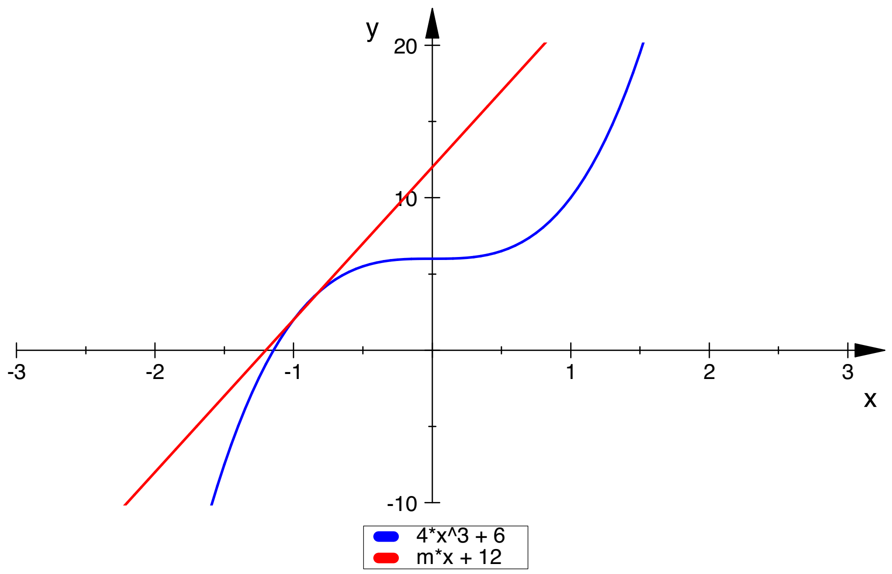
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente vom Punkt P(0/12) an den Graphen der Funktion f

Wir visualisieren zunächst mal den Graphen und Geraden durch P

```
f := x-> 4*x^3 +6;
t := x-> m*x + 12;
plotfunc2d(f(x),t(x),x= -3..3,m= -5..10,YRange=-10..20)
```

$$x \to 4 \cdot x^3 + 6$$

$$x \to m \cdot x + 12$$



Lösungsidee

Lösungsidee
Wir bestimmen die allg. Tangentengleichung in einem beliebigen Punkt P(a I f(a)) der Kurve und bestimmen die Stellen, an denen der Achsenabschnitt dieser Tangente 12 ist.

```
ta := x-> m*x+b;
```

$$x \rightarrow m \cdot x + b$$

Wir setzen ein, dass ta und f an der Stelle a den gleichen Funktionswert und die gleiche Stegung haben und bestimmen daraus den Achsenabschnittb für diese Tangente im Punkt P

```
solve(f(a) = f'(a)*a+b,b)
```

$$\left\{6 - 8 \cdot a^3\right\}$$

b soll 12 sein also erhalten wir die Stellen a aus

```
solve(12 = 6 - 8*a^3,a)
```

$$\left\{-\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)}{2}, \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)}{2}\right\}$$

Die gesuchte Stelle a liegt also bei

```
a := float(%[1])
```

$$-0.9085602964$$

Die Steigung dort ist:

```
f'(a)
```

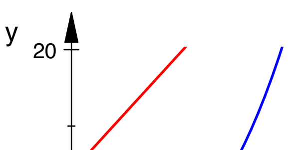
$$9.905781747$$

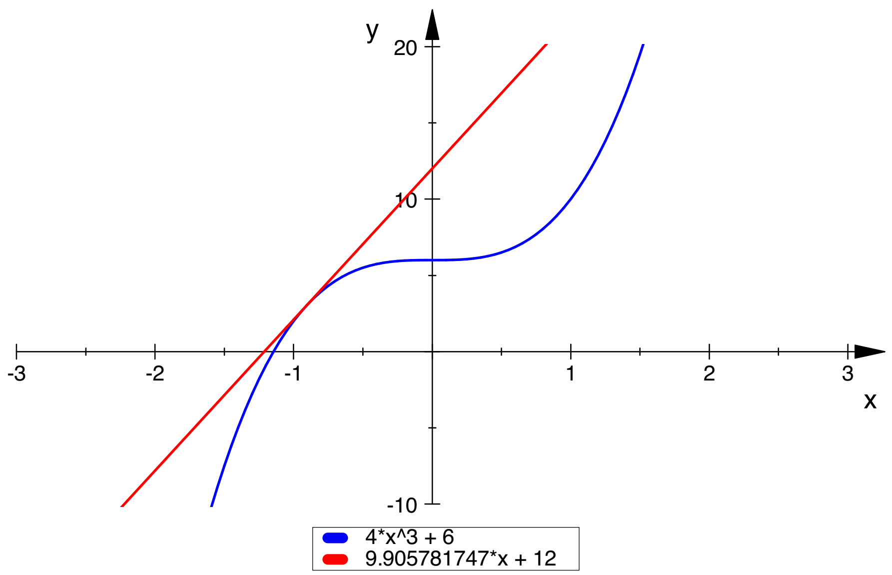
Die gesuchte Tangent hat also die Gleichung:

```
t := x-> f'(a)*x+12
```

$$x \rightarrow f'(a) \cdot x + 12$$

```
plotfunc2d(f(x),t(x),x= -3..3,YRange=-10..20)
```



b) Welche Gleichung der Tangente erhält man für einen beliebigen Punkt P(0lv) der y-Achse.

Gleiches Vorgehen wie oben:

```
reset();
```

```
f := x-> 4*x^3 +6;
ta := x-> m*x+b;
solve(f(a) = f'(a)*a+b,b);
```

$$x \to 4 \cdot x^3 + 6$$

$$x \to m \cdot x + b$$

$$\left\{6 - 8 \cdot a^3\right\}$$

Jetzt müssen wir prüfen wann b = v ist.

```
a1 := solve(v = 6 - 8*a^3,a)
```

$$\left\{\frac{\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{v-6}}{2}, \frac{\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{v-6} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)}{2}, -\frac{\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{v-6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)}{2}\right\}$$

Auch hier gibt es nur eine reelle Lösung für a:

```
a := 1/2 * (6-v)^(1/3)
```

$$\frac{\sqrt[3]{6-v}}{2}$$

Die Steigung der zugeordneten Tangente ist dann

```
f'(a)
```


$$3 \cdot (6-v)^{\frac{2}{3}}$$

$$3 \cdot (6 - v)^{\frac{2}{3}}$$

und die Tangente hat dann die Zuordnung:

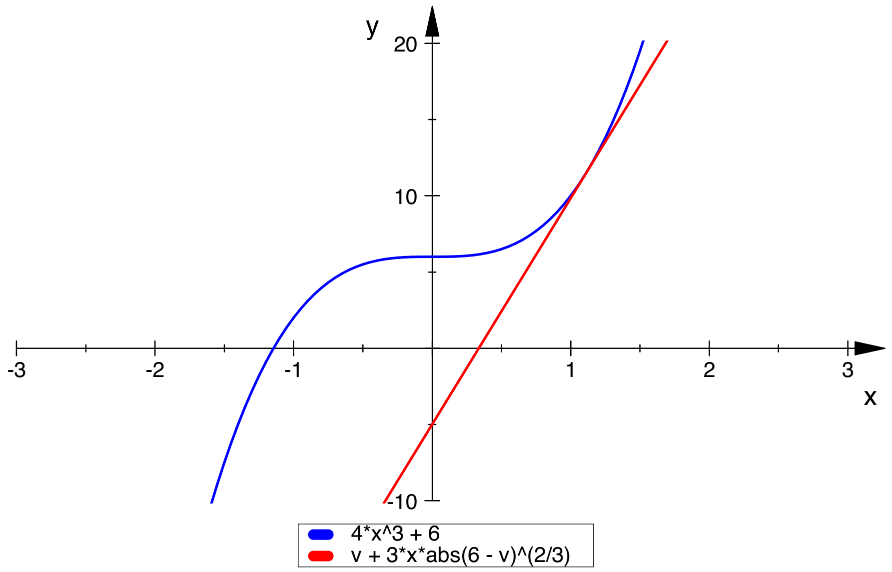
```
t := x -> f'(a)*x + v;
t(x);
```

$$x \rightarrow f'(a) \cdot x + v$$

$$v + 3 \cdot x \cdot (6 - v)^{\frac{2}{3}}$$

c) Animiere die Lösung von b) in MuPad.

```
plotfunc2d(f(x),t(x),x= -3..3,v= -5..10,YRange=-10..20)
```

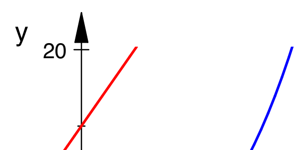


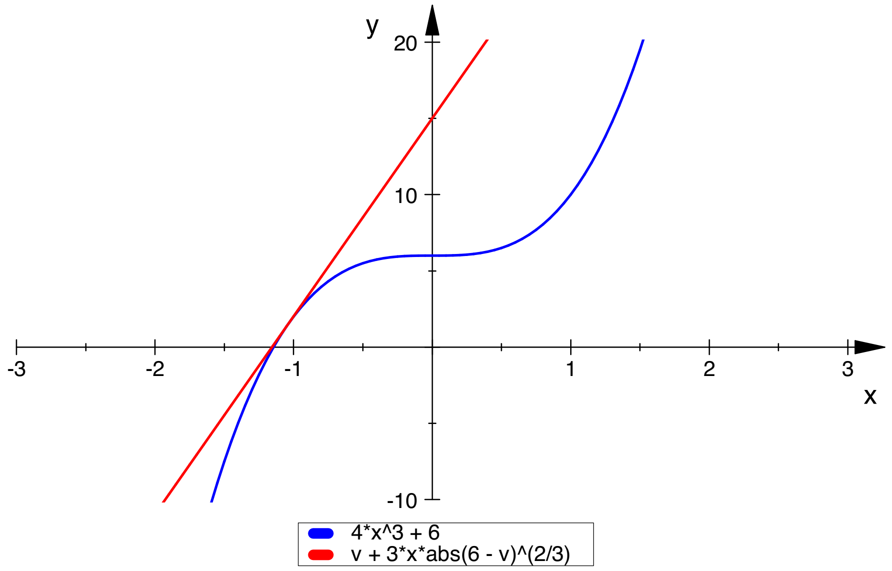
Da MuPad keine reellen Lösungen aus negativen Wurzeln berechnet müssen wir die Tangentensteigung über den Asolutbetrag von (v-6) definieren um die oben sichtbaren Darstellungsprobleme zu vermeiden. (geht über Klausurniveau hinaus!!!)
Also

```
t := x -> v + 3*x*(abs(6-v))^(2/3)
```

$$x \rightarrow v + 3 \cdot x \cdot |6 - v|^{\frac{2}{3}}$$

```
plotfunc2d(f(x),t(x),x= -3..3,v= -5..15,YRange=-10..20)
```


y
20
10
-10
-3
-2
-1
1
2
3
x
4*x^3 + 6
v + 3*x*abs(6 - v)^(2/3)