

AB: Lambacher Schweizer AnalysisAufg. 2f)

Das ist eine
sehr ordentliche und
inhaltlich präzise
Bearbeitung!

Danke dafür! :)

$$f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x$$

1. Schritt: Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6 \quad \checkmark$$

$$f''(x) = 2x^3 - 8x \quad 0,5$$

$$f'''(x) = 6x^2 - 8 \quad 0,5$$

$$59,5/60$$

$$\Rightarrow 15$$

~~15~~

$$2/2$$

2. Schritt: Symmetrie

Achsensymmetrisch zur y-Achse:

$$f(x) = f(-x)$$

$$\frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x \neq \frac{1}{10}(-x)^5 - \frac{4}{3}(-x)^3 + 6(-x)$$

$$\frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x \neq -\frac{1}{10}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 6x$$

$\Rightarrow$ keine Achsensymmetrie

Punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\frac{1}{10}(-x)^5 - \frac{4}{3}(-x)^3 + 6(-x) = -\left(\frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right)$$

$$-\frac{1}{10}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 6x = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 6x$$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrisch zum Ursprung

Außerdem ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung, da sie nur ungerade Exponenten besitzt.

(Prima!)

$$2/2$$

3. Schritt: Nullstellen

$$f(x) = 0$$

$$\frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x = 0$$

$$x \left(\frac{1}{10}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 6 \right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \checkmark$$

Substitution: $x = z^2$

$$\frac{1}{10}z^2 - \frac{4}{3}z + 6 = 0 \quad | \cdot 10$$

$$z^2 - \frac{40}{3}z + 60 = 0 \quad \checkmark$$

P-q-Formel:

$$p = -\frac{40}{3}$$

$$q = 60$$

$$z_{2,3} = \frac{\frac{40}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{40}{3}}{2}\right)^2 - 60}$$

$\searrow$

$$x_1 = 0 \quad \checkmark$$

4/4

4. Schritt: Schnitt mit der y-Achse

$$f(0)$$

$$\frac{1}{10} \cdot (0)^5 - \frac{4}{3} \cdot (0)^3 + 6 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$f(0) = 0$$

Nullstelle: P(0/0) $\checkmark$

2/2

5. Schritt: Verhalten für $x \rightarrow \infty$ / Globales Verhalten

Da der Summand mit dem höchsten Exponent $\frac{1}{10}x^5$ ist, ergibt sich $a_n > 0$ $\checkmark$ n ungerade $\checkmark$ und dementsprechend:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \checkmark$$

4/4

6. Schritt: Extremstellen

*) $f'(x) = 0$

notw. Bed. f. Ext. -1

$$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6 = 0$$

Substitution: $x = z^2$ ✓

$$\frac{1}{2}z^2 - 4z + 6 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$z^2 - 8z + 12 = 0 \quad \checkmark$$

P-q-Formel:

$$z_{1,2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 12} \quad \begin{array}{l} p = -8 \\ q = 12 \end{array}$$

$$z_1 = 6 \Rightarrow \sqrt{6} = 2,449 = x_1$$

$$z_2 = 2 \Rightarrow \sqrt{2} = 1,414 = x_2$$

$$x_3 = -2,449$$

$$x_4 = -1,414$$

$$x_1 = -2,449$$

$$x_2 = -1,414$$

$$x_3 = +1,414$$

$$x_4 = +2,449$$

Mögliche
Extremstellen

Hinreichende Bedingung für Extrema:

$$x_1 = -2,449 \Rightarrow f'(-2,449) = 0$$

$$\Rightarrow f'(-2,8)$$

$$f'(-2,8) = \frac{1}{2} \cdot (-2,8)^4 - 4 \cdot (-2,8)^2 + 6$$

$$f'(-2,8) = +5,3728$$

$$f'(-2,3) = -1,1679$$

VZW von + zu - heißt, dass an $x_1 = -2,449$ ein Hochpunkt (HP) vorliegt. ✓

*) notwendige Bedingung für Extrempunkte:

$$x_2 = -1,414 \Rightarrow f'(-1,414) = 0$$

$$\Rightarrow f'(-1,5) = -0,4687$$

$$f'(-1,3) = +0,668$$

VZW von - zu + heißt, dass an $x_2 = -1,414$ ein Tiefpunkt vorliegt. ✓

$$x_3 = +1,414 \Rightarrow f'(1,414) = 0$$

$$\Rightarrow f'(1,3) = +0,668$$

$$f'(1,5) = -0,4687$$

VZW von + zu - heißt, dass an $x_3 = +1,414$ ein Hochpunkt vorliegt. (✓)

$$x_4 = +2,449 \Rightarrow f'(2,449) = 0$$

$$\Rightarrow f'(2,3) = -1,1679$$

$$f'(2,6) = +1,8088$$

VZW von - zu + heißt, dass ein Tiefpunkt an $x_4 = +2,449$ vorliegt. (✓)

2/2

2. Vorgehensweise:

$$f''(x) = 24x^2 + 42x + 10$$

$$x_{e1} = -2,449$$

$$x_{e2} = -1,414$$

$$x_{e3} = +1,414$$

$$x_{e4} = +2,449$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen:

$$f''(x_e) > 0 \Rightarrow TP$$

$$f''(x_e) < 0 \Rightarrow HP$$

$$f''(-2,449) = -9,784 \Rightarrow HP$$

$$f''(-1,414) = +5,6577 \Rightarrow TP$$

$$f''(+1,414) = -5,6577 \Rightarrow HP$$

$$f''(+2,449) = +9,7842 \Rightarrow TP$$

2/2

3. Schritt: (Ermitteln der jeweiligen y-Werte der Extremstellen)

$$x_{c1} = -2,449$$

$$x_{c2} = -1,414$$

$$x_{c3} = +1,414$$

$$x_{c4} = +2,449$$

$$\Rightarrow f(-2,449) = -3,9191 \Rightarrow \text{Hochpunkt HP1}(-2,449/-3,919)$$

$$\Rightarrow f(-1,414) = -5,279 \Rightarrow \text{Tiefpunkt TP1}(-1,414/-5,279)$$

$$\Rightarrow f(+1,414) = 5,279 \Rightarrow \text{Hochpunkt HP2}(1,414/5,279)$$

$$\Rightarrow f(2,449) = 3,9191 \Rightarrow \text{Tiefpunkt TP2}(2,449/3,919)$$

Lokal oder Global:

Im Vergleich mit dem 5. Schritt: Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ / Globales Verhalten kann es keine globalen Extrema geben, da der Funktionsgraph sowohl ins negativ als auch in das positiv unendliche strebt.

$\Rightarrow$ Alle Extrema sind lokal.

$$\begin{array}{r} \checkmark \\ 111 \\ \hline 818 \end{array}$$

Bonus

$$\begin{array}{r} \checkmark \\ +1 \\ \hline 918 \end{array}$$

7. Schritt: Wendepunkte

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$

$$f''(x) = 2x^3 - 8x$$

$$2x^3 - 8x = 0$$

$$x(2x^2 - 8) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Mögliche Wendestellen:

$$x_{w1} = -2$$

$$x_{w2} = 0$$

$$x_{w3} = 2$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$$x_{w1} = -2$$

$$f''(-2, 1) = -1,722$$

$$f''(-1, 3) = +1,482$$

VZW der zweiten Ableitung von $-$ zu $+$
heißt: WP mit Rechts-Links-Krümmung
an $x_{w1} = -2$.

$$x_{w2} = 0$$

$$f''(-0, 1) = 0,798$$

$$f''(0, 1) = -0,798$$

VZW der zweiten Ableitung von $+$ zu $-$
heißt: WP mit links-Rechts-Krümmung
an der Stelle $x_{w2} = 0$.

$$x_{w3} = 2$$

$$f''(1, 3) = -1,482$$

$$f''(2, 1) = +1,722$$

VZW der zweiten Ableitung von $-$ zu $+$
heißt: WP mit Rechts-Links-Krümmung an
der Stelle $x_{w3} = 2$.

2. Vorgehensweise:

$$x_{w1} = -2$$

$$f'''(-2) = 16$$

$$x_{w2} = 0$$

$$f'''(0) = -8$$

(✓)
2/2

$$x_{W3} = +2$$

$$f'''(2) = 16$$

$f'''(x) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt der 1. Ableitung

$\Rightarrow$ WP mit Rechts-links-Krümmung an den Stellen: $x_{W1} = -2$ und $x_{W3} = +2$

$f''' < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt der 1. Ableitung

$\Rightarrow$ WP mit links-Rechts-Krümmung an der Stelle $x_{W2} = 0$.

Ermitteln der jeweiligen y-Werte der Wendestellen:

$$f(-2) = -\frac{68}{15}$$

$\Rightarrow$ WP1 $(-2 | -\frac{68}{15})$ bzw. WP1 $(-2 | \text{ca. } -4,53)$

$$f(0) = 0$$

$\Rightarrow$ WP2 $(0 | 0)$

$$f(2) = \frac{68}{15}$$

$\Rightarrow$ WP3 $(2 | \frac{68}{15})$ bzw. WP3 $(2 | \text{ca. } 4,53)$

8. Schritt: Monotonie-Intervalle

$x_{c1} = -2,449 \Rightarrow$ HP (VZW in f' von $+$ zu $-$)

$x_{c2} = -1,414 \Rightarrow$ TP (VZW in f' von $-$ zu $+$)

$x_{c3} = +1,414 \Rightarrow$ HP (VZW in f' von $+$ zu $-$)

$x_{c4} = +2,449 \Rightarrow$ TP (VZW in f' von $-$ zu $+$)

$\Rightarrow$ Es gibt 5 verschiedene Monotonie-Intervalle:

I: $(-\infty; -2,449)$: G_f streng monoton steigend

$(f'(x) > 0 \Leftrightarrow f' \text{ positiv})$

II: $(-2,449; -1,414)$: G_f streng monoton fallend

$(f'(x) < 0 \Leftrightarrow f' \text{ negativ})$

III: $(-1,414; +1,414)$: G_f streng monoton steigend
($f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'$ positiv) (✓)

IV: $(+1,414; +2,449)$: G_f streng monoton fallend
($f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'$ negativ) (✓)

V: $(+2,449; +\infty)$: G_f streng monoton steigend
($f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'$ positiv) (✓)

2/2

Super!

9. Schritt: Wendetangente

Wir wissen:

WP1 mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle $x_{w1} = -2$ mit $(-2 | -\frac{68}{15})$.

WP2 mit links-Rechts-Krümmung an der Stelle $x_{w2} = 0$ mit $(0 | 0)$.

WP3 mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle $x_{w3} = 2$ mit $(2 | +\frac{68}{15})$.

Wir benötigen:

- Steigung m .

- y -Achsenabschnitt b :

Steigung m : $f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$

$$f'(-2) = -2$$

$$f'(0) = 6$$

$$f'(2) = -2$$

$$f'(-2) \cdot (-2) + b = -\frac{68}{15}$$

$$= (-2) \cdot (-2) + b = -\frac{68}{15}$$

$$4 + b = -\frac{68}{15}$$

$$b = -\frac{68}{15} - \frac{60}{15}$$

$$b = -\frac{128}{15}$$

$$\Rightarrow f'(0) \cdot (0) + b = 0$$

$$0 + b = 0$$

$$b = 0$$

$$f'(2) \cdot (2) + b = \frac{68}{15}$$

$$-4 + b = \frac{68}{15}$$

$$b = \frac{68}{15} + 4$$

$$b = \frac{128}{15}$$

Tangentenfunktionsgleichungen:

$$t(x) = mx + b$$

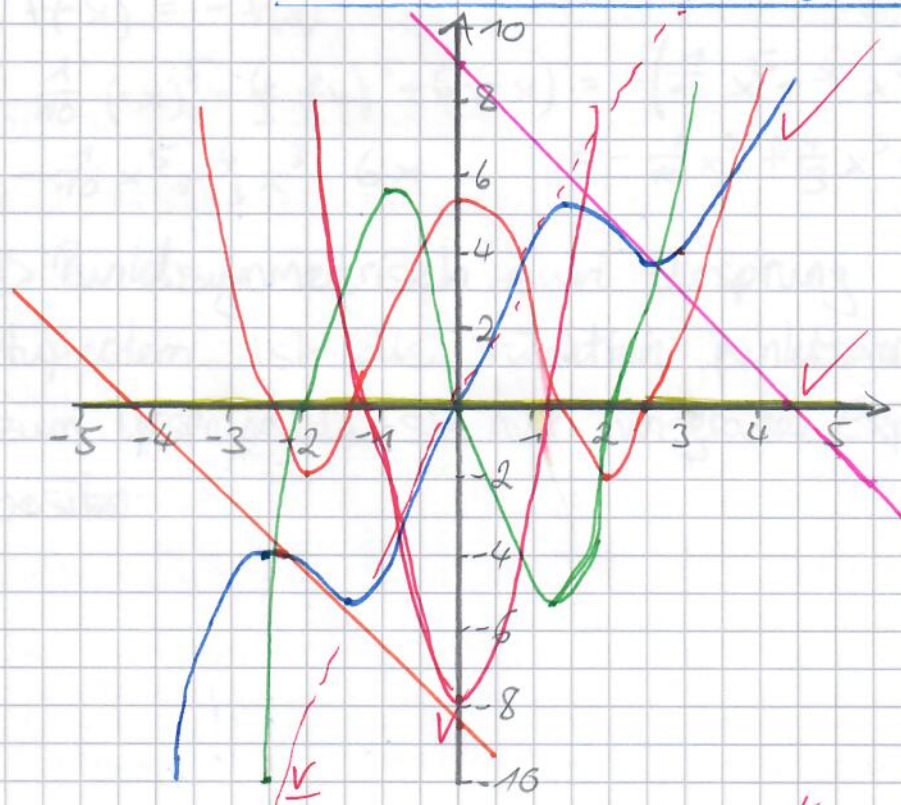
$$t_{w_1}(x) = -2x - \frac{128}{15}$$

$$t_{w_2}(x) = 0x + 0$$

$$t_{w_3}(x) = -2x + \frac{128}{15}$$

10. Schritt: Zeichnen des Graphen

$(f, f', f'', f''', t_{w_1}, t_{w_2}, t_{w_3})$



- = $f(x)$
- = $f'(x)$
- = $f''(x)$
- = $f'''(x)$
- = $t_{w_1}(x)$
- = 0
- = $t_{w_3}(x)$

(Nur G_f
+ Tangenten
gefordert!)
Sehr gut!

2/2

Herz! 36/35
Gefühlwunsch!

(8)