Eichendorffschule Kelkheim, Mathe 11, 2008/09

Lösungen der Aufgaben zum Wochenplan "Trigonometrische Funktionen"

**1. Aufgabe**
Ein Punkt P bewegt sich mit gleich bleibender Geschwindigkeit um das Quadrat in Fig. 1 herum. Fig.
2 zeigt den Graphen der Funktion f: Zeit → Abstand des Punktes von der Geraden g.

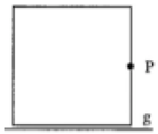


Fig. 1

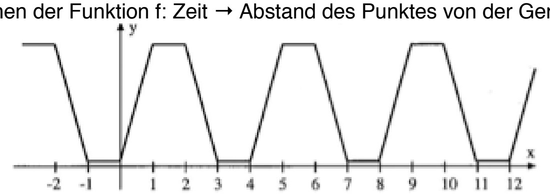
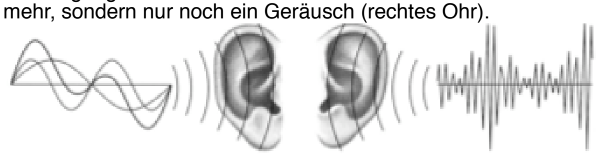


Fig. 2

a) Erläutere den Verlauf des Graphen in Fig. 2.
b) Gib eine Verschiebung an, die den Graphen auf sich abbildet.
c) Wie ändert sich die Periode, wenn sich der Punkt mit dreifacher Geschwindigkeit um das Quadrat
herumbewegt?

Lösung:
a) in einer Sekunde bewegt sich der Punkt längs einer Seite des Quadrates. Dabei bleibt bei 2 Seiten der Abstand zur Geraden g konstant und auf den anderen Seiten nimmt der Abstand linear mit der Zeit ab bzw. auf der anderen Seite linear mit der Zeit zu.
b) Eine Verschiebung um 4 Einheiten (oder 8, 12, 16 ..) auf der x-Achse
c) Dreifache Geschwindigkeit bedeutet eine Drittelung der Periode. Aus der Peroiode T = 4 Sekunden werden T* = 4/3 Sekunden.

**2. Aufgabe**
Schallschwingungen können durch Sinuskurven beschrieben werden. Bei der Überlagerung mehrerer solcher Sinuskurven entstehen teilweise sehr komplizierte Schwingungsbilder. Der Mensch hört dann keinen Zusammenhang von Tönen (linkes Ohr) mehr, sondern nur noch ein Geräusch (rechtes Ohr).

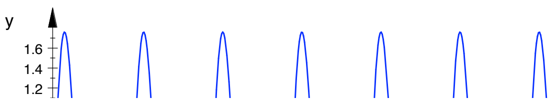


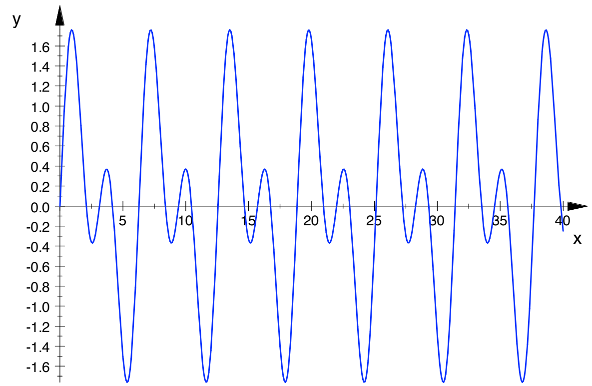
Zeichne die „Geräusch-Kurven" $y = \sin \alpha + \sin(2\alpha)$ / $y = 2 \cdot \sin \alpha + \sin(2\alpha)$ / $y = 3 \cdot \sin \alpha + \sin(3\alpha)$

Lösung:

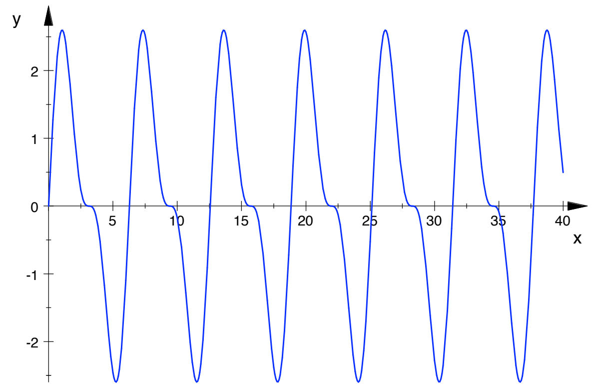
```
plotfunc2d(sin(x)+ sin(2*x),x=0..40)
```





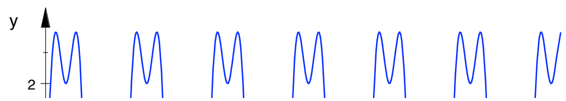



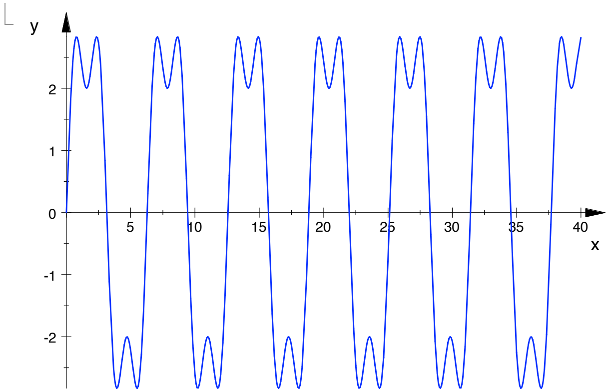

```
plotfunc2d(2* sin(x)+ sin(2*x),x=0..40)
```




```
plotfunc2d(3* sin(x)+ sin(3*x),x=0..40)
```

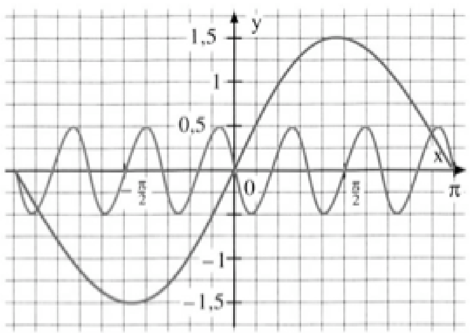


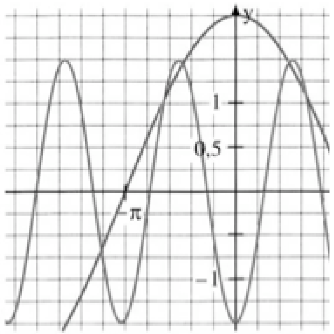




### 3. Aufgabe

Bestimme zu jedem Graphen die Periode und die Amplitude.
• Bestimme die Folge von Verschiebungen und Streckungen die auf die Sinusfunktion angewendet werden um die gegeben Graphen zu erhalten.
• Gib zu jedem Graphen einen Funktionsterm der Form x -> a*sin(b*x–e) an.





a) Streckung in y-Richtung mit a = 1,5;    sin(x) -> 1,5 * sin(x)

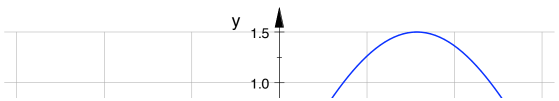
b) Streckung in y-Richtung mit a = -0,5;   sin(x) -> -0,5 * sin(x)
Streckung in x-Richung mit 1/b = 1/6;    sin(x) -> -0,5 * sin(x) -> - 0,5 * sin(6*x)

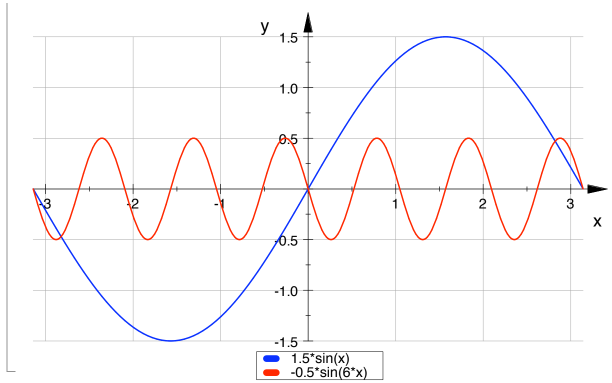
c) Streckung in y-Richtung mit a = 2;    sin(x) -> 2* sin(x)
Streckung in x-Richung mit 1/b = 2;    sin(x) -> 2* sin(x) ->  2* sin((1/2)*x)
Verschiebung in x-Richting mit c = -PI;     sin(x) -> 2* sin(x) ->  2* sin((1/2)*x) ->  2* sin((1/2)*(x+PI)) = 2*sin(x/2 + PI/2)

d) Streckung in y-Richtung mit a = 1,5;    sin(x) -> 1,5* sin(x)
Streckung in x-Richung mit 1/b = 1/2;    sin(x) -> 1,5* sin(x) ->  1,5* sin(2*x)
Verschiebung in x-Richting mit c = +PI/4;    sin(x) -> 1,5* sin(x) ->  1,5* sin((2*x) ->  1,5* sin(2*(x- (PI/4)))
Überprüfung durch Zeichen der Graphen

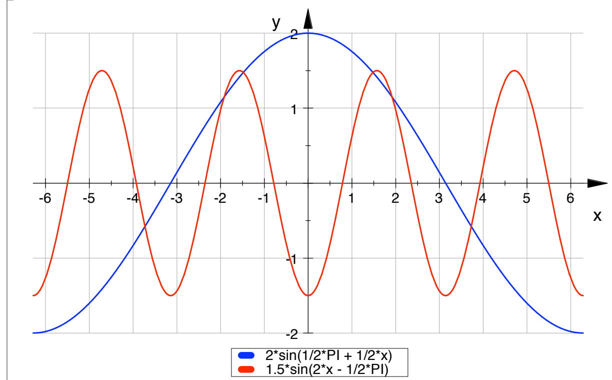


```
plotfunc2d(1.5*sin(x), -0.5*sin(6*x), x=-PI..PI,GridVisible)
```






```
plotfunc2d(2*sin(x/2 + PI/2), 1.5*sin(2*x-PI/2), x=-2*PI..2*PI,Gri
```




### 4. Aufgabe - Tageslänge

Im Verlauf eines Jahres  ändert sich die Tageslänge, d.h. die Zeitdauer, während der die Sonne über dem Horizont steht.
In Stockholm schwankt die Tageslänge zwischen 18 Stunden 14.4 Minuten am 21. Juni und  5 Stunden 46 Minuten
sechs Monate später. Die Tageslänge in Stockholm soll in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Monaten ab dem 21. März)
durch eine Funktion T mit

$T(t) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ beschrieben werden.

• Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b.
• Welche Tageslänge ergibt sich aus dem Modell für den 21. April?
• Schätze ab, welche mittlere Tageslänge ergibt sich für den Zeitraum vom 21. Juni bis zum 21. September?
• Schätze ab, wann ändert sich die Tageslänge am raschesten und wie groß ist sie dann?



Lösung:
a ist in diesem Fall die mittlere Tageslänge, b ist in diesem Fall die maximale Abweichung von der mittleren Tageslänge

```
a := float(((18 + 14.4/60) + (5 + 46/60)) / 2)
```

$12.00333333$

```
b := (18 + 14.4/60) - a;
```

$6.236666667$

```
T := t-> a+b*sin(PI/6*t)
```

$$t \rightarrow a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

Für den 21 April gilt t = 1

```
T(1)
```

$15.12166667$

Die mittlere Tageslänge von Juni bis September ist z.B. näherungsweise

```
Tm := float((T(3)+T(4)+T(5)+T(6))/4)
```

$15.69236128$

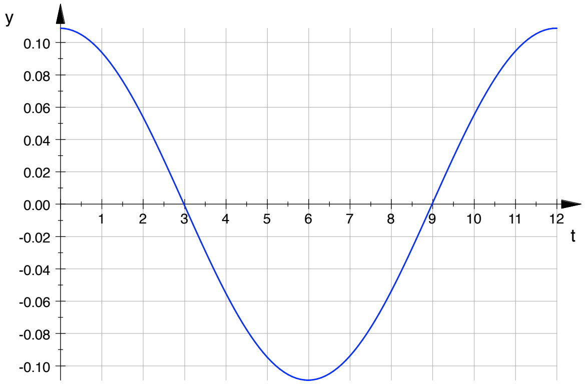
Um die Veränderung der Tagesläne von einem Tag auf den andrene zu betracheten untersuchen wir, wie sich die Tageslänge z.B. von heute auf morgen verändert. Dazu definieren wir die Funktion Aenderung durch

```
Aenderung := t -> T(t+1/30) - T(t);
```

$$t \rightarrow T\left(t + \frac{1}{30}\right) - T(t)$$

Wir stellen die Aenderung im Laufe eines Jahres (Beginn 21. März) dar

```
plotfunc2d(Aenderung(t), t = 0..12, GridVisible)
```




Am stärksten ändert sich die Tageslänge am 21. März und 21. September. Dann ist der nächste Tag ca. 0.11 Std. länger bzw. kürzer



**5. Aufgabe**

Die Konstruktionsabteilung eines Automobilherstellers hat ein neues Modell entwickelt. Für dieses Fahrzeug lässt sich der Zusammenhang zwischen der Motorleistung P (in Watt) und der Fahrgeschwindigkeit v (in m/s) durch die Vorschrift

$$v \rightarrow P(v) = v^3 + (50 \cdot \cos\alpha + 2000 \cdot \sin\alpha) \cdot v$$

beschreiben, wobei a den Steigungswinkel der Straße angibt.

• Wie viele Kilowatt (kW) leistet der Motor bei 100km/h auf ebener Fahrbahn?

• Bei einem Versuch auf ansteigender Fahrbahn wurden eine Geschwindigkeit von 10 m/s und eine Motorleistung von 6,2 kW gemessen. Wie groß ist die Steigung der Fahrbahn.

Lösung:

Wir definieren die Funktion P

```
P := v -> v^3 +(50*cos(alpha) +2000*sin(alpha))*v
```

$$v \rightarrow v^3 + (50 \cdot \cos(\text{alpha}) + 2000 \cdot \sin(\text{alpha})) \cdot v$$

```
alpha := 0;
```

$0$

100 Km/h müssen im m/s umgerechnet werden

```
P(100/3.6)
```

$22822.3594$

Der Motor leistet bei 100 km/h auf ebener Strecke also ca. 22,8 kW.

Um die gesuchte Steigung alpha der Fahrbahn bei den gegebenen Daten zu finden müssen wir zunächst die Festlegung von alpha = 0 lösen und lösen dann die Gleichung

```
delete alpha;
solve(P(10)=6200,alpha);
```

$$\left\{2 \cdot \arctan\left(\frac{200}{57} - \frac{\sqrt{37321}}{57}\right) + 2 \cdot \pi \cdot k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2 \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{37321}}{57} + \frac{200}{57}\right) + 2 \cdot \pi$$

Wie zu erwarten ist die Lösung periodisch mit der Periode 2*PI. Die Lösungen im Bogenmaß lauten:

```
alpha1 := numeric::solve(P(10)=6200,alpha=1..PI);
```

$\{2.853659761\}$

```
alpha2 := numeric::solve(P(10)=6200,alpha=0..1);
```

$\{0.2379433058\}$

Zur Kontrolle überprüfen wir welche Leistung bei 10 m/s und den entsprechenden Winkeln gebraucht wird

```
alpha := alpha1[1];
P(10);
```

$2.853659761$

2.853659761

6200.0

```
alpha := alpha2[1];
P(10);
```

0.2379433058

6200.0

Die entsprechenden Winkel im Winkelmaß sind:

```
alpha1wink := float(alpha1/PI*180);
alpha2wink := float(alpha2/PI*180);
```

$\{163.5026604\}$

$\{13.63314719\}$

Wegen der Bedeutung als Steigungswinkel ist also alphawink = 13,6° die gesuchte Lösung.