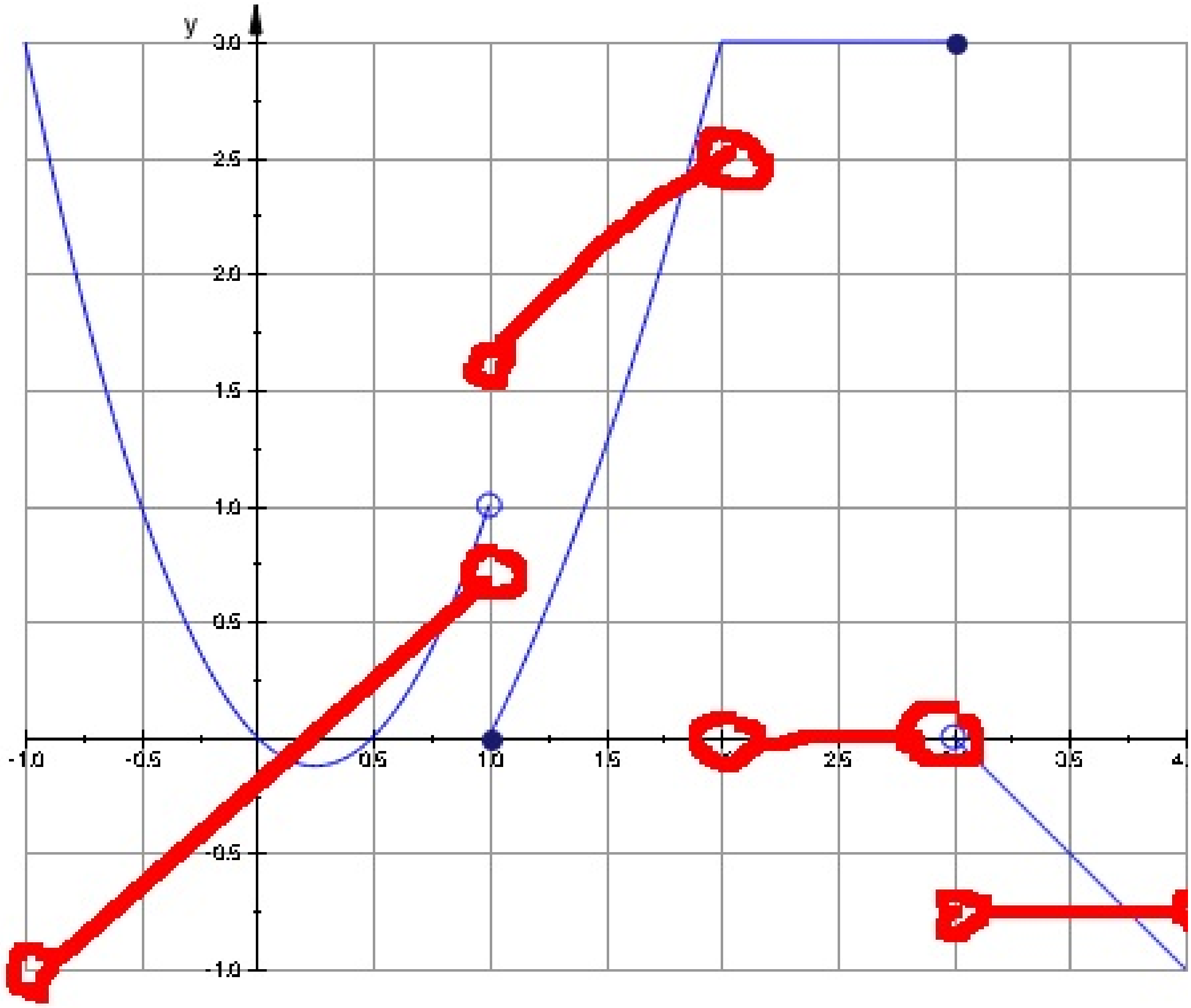
Boll, Fischer Mathematik Stufe 11 Eichendorffschule April/Mai 2009

Lösungen zum Wochenplan Monotonie, Extremstellen .....

1.Gegeben ist in der nebenstehenden Graphik der Graph einer Funktion, die im Intervall [-1,4] definiert



ist.

a)Gebe die Intervalle an, in denen der Funktionsgraph monoton steigend, streng monoton steigend, monoton fallend bzw. streng monoton fallend ist

Monoton steigend in den Intervallen: [0.25,1[und [1, 3]
Streng monoton steigend in den Intervallen: [0.25,1[und [1, 2]
Monoton fallend in den Intervallen: [-1, 0.25] und [2,4]
Streng monoton fallend in den Intervallen: [-1, 0.25] und [3,4]

b)Untersuche den Graphen auf lokale, globale und Randextremstellen und gebe diese begründet an.

Lokale Minimumstellen bei x = 0.25; 1; und x in]2,3[
Lokale Maximumstellen bei x = -1; 2; 3 und x in [2,3]
Globale Maximumstellen bei x = -1 und x in [2,3]
Globale Minimumstellen bei x = 4
Randextremstellen bei x = -1; 4

c)Begründe, an welchen Stellen im Definitionsbereich der Funktion die Funktion nicht stetig ist.

Nicht stetig in x = 1 und x = 3 da der Graph der Funktion dort springt, dort nicht ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann.
Der linkssetige Grenzwert der Funktion stimmt dort nicht mit dem rechtsseitgen Grenzwert und dem Funktionswert an der Stelle überein.

Für x = 1 gilt:

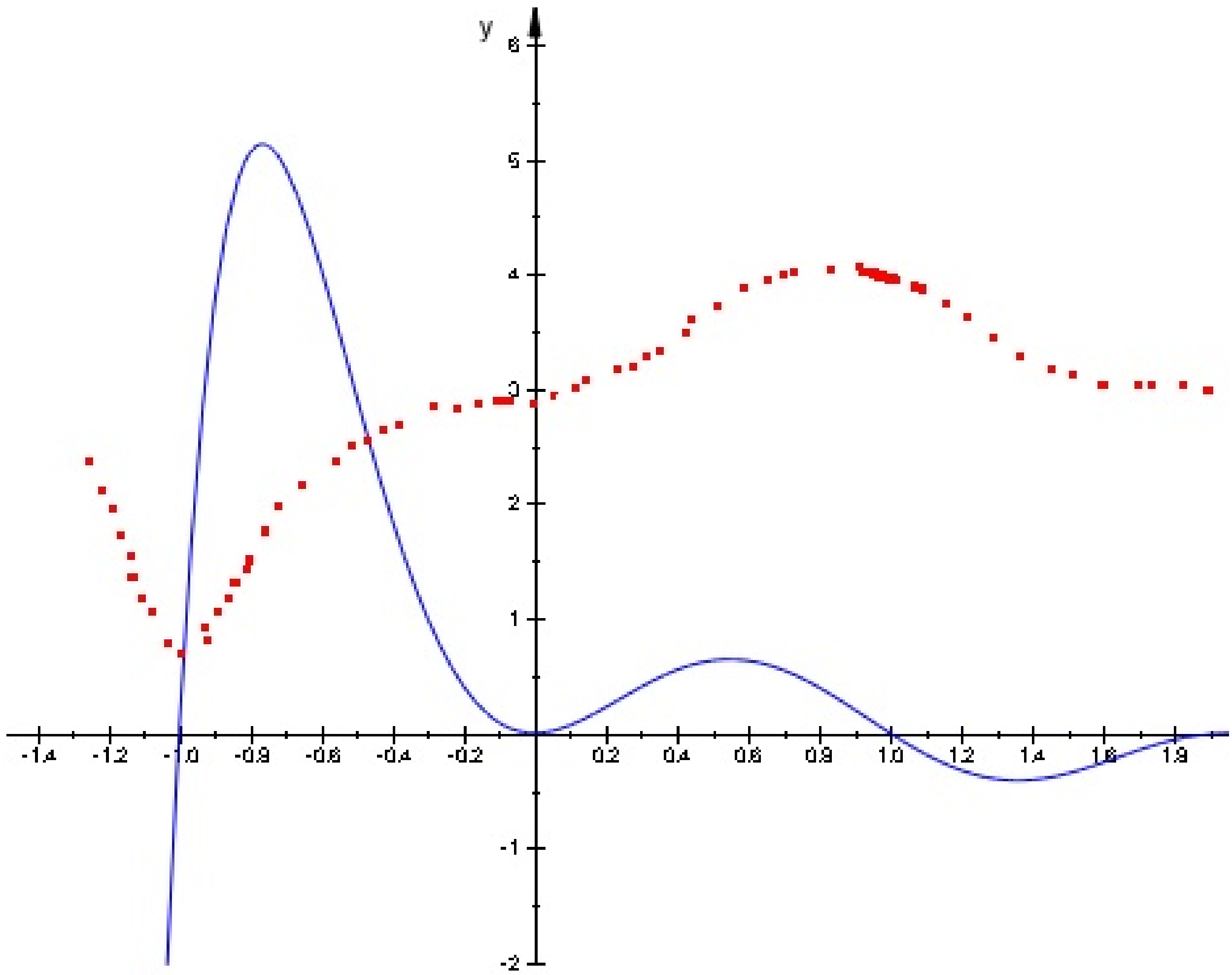
$$\lim_{h \to 0} f(1+h) = 0 \; ist\; gleich \; f(1) = 0 \; ist\; ungleich \lim_{h \to 0} f(1-h) = 1$$

für x = 3 gilt:

$$\lim_{h \to 0} f(3+h) = 0 \; ist\; ungleich \; f(3) = 3 \; ist\; gleich \lim_{h \to 0} f(3-h) = 3$$

d)Skizziere in die Graphik den Graph der Ableitung der Funktion.
Siehe oben:

2. .In der nebenstehenden Graphik ist der Graph der Ableitung einer Funktion dargestellt.



a)An welchen Stellen muss der Graph der Originalfunktion Extremstellen besitzen. Entscheide und begründe, welcher Art diese Extremstellen sind?

An der Stelle x = -1 muss eine Minimumstelle sein da die 1. Ableitung einen Vorzeichenwecjsel von - -> + macht . Dies entspricht einem Übergang von fallen nach Steigen des Graphen.
An der Stelle x = 1 muss eine Maximumstelle sein da die 1. Ableitung einen Vorzeichenwecjsel von + -> - macht . Dies entspricht einem Übergang von Steigen nach Fallen des Graphen.
An der Stelle x = 2 muss eine Minimumstelle sein da die 1. Ableitung einen Vorzeichenwecjsel von - -> + macht . Dies entspricht einem Übergang von fallen nach Steigen des Graphen.

b)Skizziere in die Graphik einen möglichen Verlauf der Originalfunktion.
Siehe rote Skizze oben.

3 .Nimm durch begründete Beispiele oder Gegenbeispiele Stellung zu den folgenden Aussagen:
a)Wenn f'(x0) = 0 dann ist in x0 eine Extremstelle einer differenzierbaren Funktion f
Falsch. Gilt manchmal aber nicht immer. Gegenbeispiel f(x) = x^3, f'(0) = 0 aber der Graph hat dort keine Extremstelle.

b)Wenn x0 eine Extremstelle einer differenzierbaren Funktion ist dann gilt: f'(x0) = 0
Richtig. Ist die notwendige Bedingung für Extremstellen diffbarer Funktionen. Dort muss die Tangente waagrecht sein. z. B. f(x) = x^2

c)Wenn x0 eine Extremstelle einer differenzierbaren Funktion ist dann gilt: f'(x0) = 0 und f''(x0) <> 0
Falsch. Gilt manchmal aber nicht immer. Gegenbeispiel f(x) = x^4, f'(0) = 0 und in 0 ist auch ein Minimum. Aber die 2. Ableitung f''(0) ist auch gleich 0. .

d)Wenn f'(x0) = 0 und f' einen Vorzeichenwechsel in x0 durchführt dann ist in x0 eine Extremstelle einer differenzierbaren Funktion f
Richtig. Ist eine der hinreichenden Bedingungen für Extremstellen diffbarer Funktionen. Wenn f' einen VZW hat dann ändert sich das Monotonieverhalten und das bedeutet eine Extremstelle. z.B. f(x) = x^2

4. Bestimme alle Extremstellen der Funktion f mit $f(x)=3\cdot x^3+5\cdot x^2+1 \; und \; x\in\mathbb{R}$. Wende als hinreichende Bedingung sowohl das Vorzeichenwechselkriterium als auch das Kriterium mit der 2. Ableitung an und überprüfe Deine Ergebnisse durch Zeichnen des Graphen.

```
f := x -> 3*x^3 +5*x^2 +1;
```

$$x \rightarrow 3\cdot x^3 + 5\cdot x^2 + 1$$

Wo können Extremstellen sein? Überprüfen der notwendigen Bedingung:

```
solve (f'(x) = 0,x)
```

$$\left\{-\frac{10}{9}, 0\right\}$$

Überprüfen der hinreichenden Bedingung mit der 2. Ableitung

```
f''(-10/9);
f''(0);
```

$$-10$$

$$10$$

10

f'(0) = 0 und f''(0) =10 -> in x = 0 ist eine Minimumstelle mit dem Tiefpunkt (0I1)
f'(-10/9) = 0 und f''(-10/9) =-10 -> in -10/9 = 0 ist eine Maximumstelle mit dem Hochpunkt (-10/9 I f(-10/9))

alternativ kann geprüft werden, ob f' einen Vorzeichenwechsel in ix = 0 und x = -10/9 macht.

z.b.

```
f'(-0.001);
f'(+0.001);
f'((-10/9)+0.001);
f'((-10/9)-0.001);
```

-0.009991

0.010009

-0.009991

0.010009

Die Rechnungen zeigen, dass f' einen Vorzeichenwechsel in x = 0 und x = -10/9 macht und damit die 1. hinreichende Bedingung für Extremstellen erfüllt ist.

5. Gegeben ist nun die Schar von Funktionen fa mit

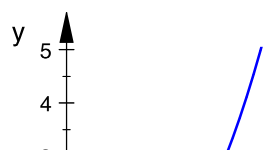
$f_a(x)=a\cdot x^3+x^2 \; und \; x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$

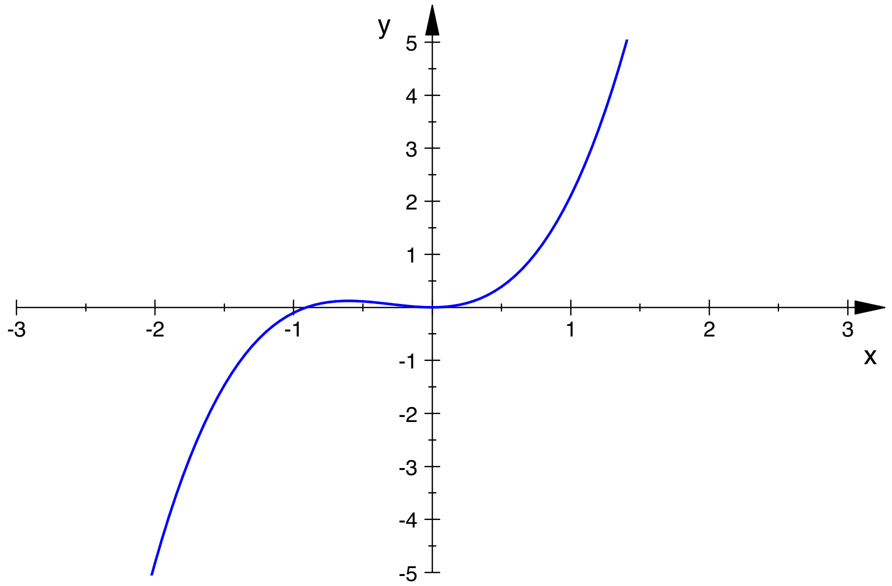
a)Erstelle eine Animation des Graphen der Funktionenschar und beobachte, wie sich die Lage des Hochpunktes verändert.

```
fa := x -> a * x^3+x^2;
```

$x \rightarrow a\cdot x^3 + x^2$

```
plotfunc2d(fa(x),x=-3..3,a=-2..2,YRange = -5..5)
```



b)Untersuche die Funktionenschar auf Extremstellen und weise nach, dass es für alle a nur jeweils einen lokalen Hochpunkt gibt. Bestimme diesen Hochpunkt.

```
solve (fa'(x)=0,x)
```

$$\begin{cases} \{0\} & \text{if } a = 0 \\ \left\{0, -\frac{2}{3 \cdot a}\right\} & \text{if } a \neq 0 \end{cases}$$

```
fa''(0);
fa''(-2/(3*a));
```

$$2$$

$$-2$$

Da f''(0) = 2 unabhängig von a immer positiv ist und f'(0) = 0 ist liegt dort ein lokales Minimum.
Da f''(`-2/(3*a)`) = -2 unabhängig von a immer negativ ist und f'(`-2/(3*a)`) = 0 ist liegt dort ein lokales Minimum.

```
fa(-2/(3*a))
```

$$\frac{4}{27 \cdot a^2}$$

Der einzige Hochpunkt H liegt also bei (`-2/(3*a)` | $\frac{4}{27 \cdot a^2}$)

c)Zeige, dass der Hochpunkt der Funktionen sich auf der Ortskurve K mit bewegt

$K(x) = \frac{x^2}{3}$ wenn a animiert wird. Überprüfe in einer Graphik.

$K(x)=\frac{x^2}{3}$ wenn a animiert wird. Überprüfe in einer Graphik.

xH = -2/(3*a) und yH = $\frac{4}{27\cdot a^2}$. Wir lösen xH nach a auf und setzen dieses a in yH ein.

```
solve(xH = -2/(3*a),a)
```

$$\begin{cases} \emptyset & \text{if } xH = 0 \\ \left\{-\frac{2}{3\cdot xH}\right\} & \text{if } xH \neq 0 \end{cases}$$

```
yH := 4/(27*a^2);
subs(yH, a = -2/(3*xH));
```

$$\frac{4}{27\cdot a^2}$$

$$\frac{xH^2}{3}$$

Alle xH Werte liegen also auf einer zugeordneten Parabel

```
plotfunc2d(fa(x),x^2/3,x=-3..3,a=-2..2,YRange = -5..5)
```