Boll, Eichendorffschule Kelkheim, Mathematik 11.1/2 2008/09

Lösungen der Wochenplanaufgaben zu ganzrationalen Funktionen

1. Aufgabe
Gegeben sind im folgenden die Funktionen mit dem Termen:

a) $f(x)=x^3-x^2-2\cdot x+1$

b) $g(x)=-x^4+3\cdot x^2-1$

c) $h(x)=x^5+x^3-x$

```
assume(Type::Real);
f := x -> x^3 - x^2 -2*x +1;
g := x -> -x^4 + 3*x^2 - 1;
h := x -> x^5 + x^3 - x;
```

$\mathbb{R}$

$x \to x^3 - x^2 - 2\cdot x + 1$

$x \to 3\cdot x^2 - x^4 - 1$

$x \to x^5 + x^3 - x$

1. 1.Beschreibe und begründe jeweils das globale Verhalten der Funktionsgraphen

Über das globale Verhalten entscheidet die höchste Potenz.
a) Der Graf sieht global wie der von x^3 aus.
b) Der Graf sieht global wie der von $-x^4$ aus.
c) Der Graf sieht global wie der von x^5 aus.

2.Beschreibe und begründe jeweils das Verhalten der Funktionsgraphen in der Umgebung von x = 0

In der Umgebung von 0 beschreiben die Terme mit den niedigen Potenzen den Graphen der Funktionen:
a) ungefähr wie -2x+ 1, Gerade durch (0I1) mit Steigung -2
b) ungefähr wie $3*x^2$ - 1, nach oben offene Parabel durch (0I-1)
c) a) ungefähr wie -x , Gerade durch (0I0) mit Steigung -1

3.Beschreibe und begründe eventuelle Symmetrien der Funktionsgraphen

Für Symmetrie zur y- Achse gilt: f(x) = f(-x), bei ganzrationalen Funktionen nur gerade Exponenten
und für Symmetrie zum Ursprung gilt: f(x) = - f(-x) , bei ganzrationalen Funktionen nur ungerade Exponenten

a) keine Symmetrie da gerade und ungerade Exponenten

```
bool(f(x)=f(-x))
```


FALSE

FALSE

b) Symmetrie zur y-Achse da nur gerade Exponenten

```
bool(g(x)=g(-x))
```

TRUE

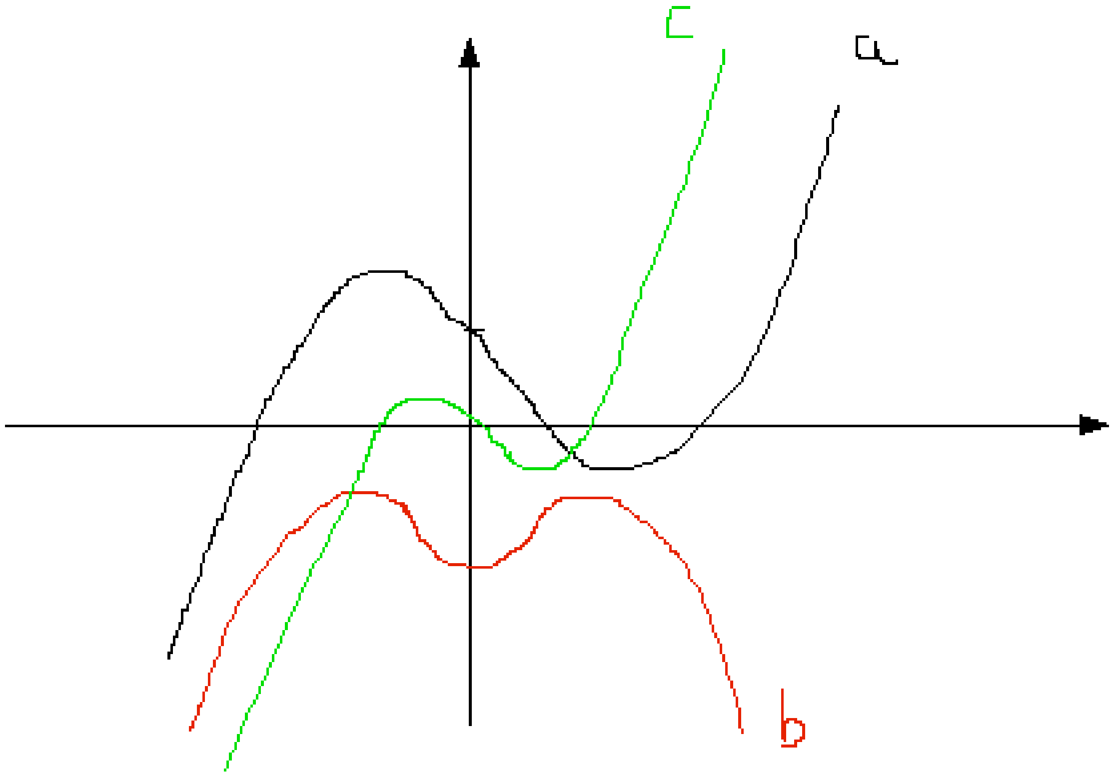
b) Punktsymmetrie zum Ursprung da nur ungerade Exponenten

```
bool(h(x) = -h(-x))
```

TRUE

4.Skizziere auf Basis von 1 ..3 eine Skizze des Verlaufs der Funktionsgraphen

Es ergeben sich folgende Skizzen:



5.Bestimme mit / ohne MuPad die Nullstellen der Funktionen f, g und h

Nullstellen mit MuPAd:

```
solve(f(x) = 0,x)
```

$\mathbb{R} \cap \mathrm{RootOf}\left(X1^3 - X1^2 - 2 \cdot X1 + 1, X1\right)$

```
numeric::solve(f(x)=0,x)
```

$\{-1.246979604, 0.4450418679, 1.801937736\}$


```
solve(g(x) = 0,x);
```

```
solve(g(x) = 0,x);
numeric::solve(g(x) = 0,x);
```

$$\left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right\}$$

$$\{-1.618033989, -0.6180339887, 0.6180339887, 1.618033989\}$$

```
solve(h(x) = 0,x);
numeric::solve(h(x) = 0,x);
```

$$\left\{0, \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\{-0.7861513778, 0.7861513778, 0.0, -1.27201965\cdot i, 1.27201965\cdot i\}$$

ohne MuPad:
a) so nicht lösbar
b) Substitution von $x^2 = z$ liefert: $-z^2+3z-1 = 0$ oder $z^2 -3z +1 = 0$,
Anwenden der pq-Formel mit p = -3 und q = +1 liefert
$z_{1/2} = {}^3/_2 +- ({}^9/_4 -1)^{0,5}$

```
z1 := (3/2) +sqrt(((9/4)-1));
z2 := (3/2) -sqrt(((9/4)-1));
```

$$\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Da $x^2 = z$ ->

```
x1 := sqrt(z1);
x2 := – sqrt(z1);
x3 :=  sqrt(z2);
x4 := – sqrt(z2);
```

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}}$$

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$-\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

```
float(%)
```

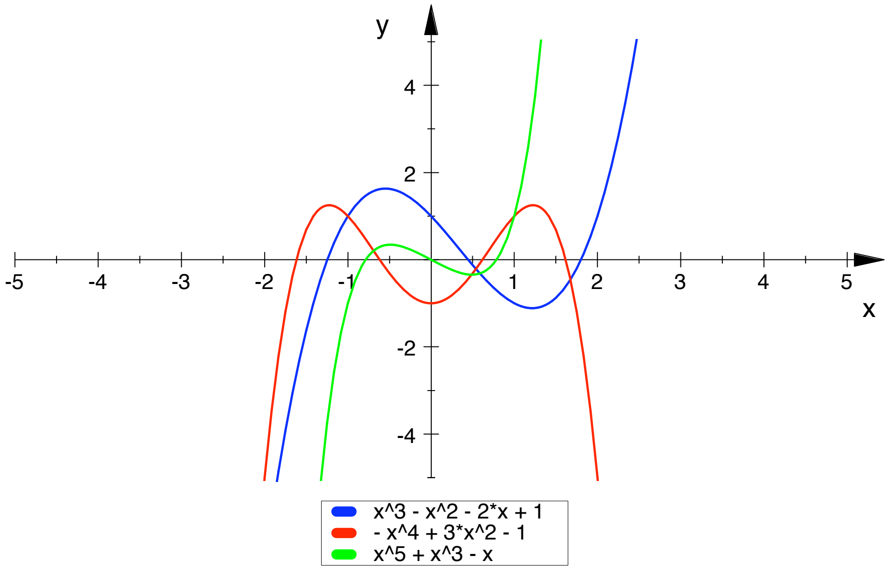
-0.6180339887

Die Lösungen zu c) ergeben sich ähnlich, Allerdings muss zunächst x ausgeklammert werden.

6. Zeichne die Funktionsgraphen mit MuPad und überprüfe daran deine Aussagen von a,b,c

Die Graphen der Funktionen:

```
plotfunc2d(f(x),g(x),h(x),YRange= -5..5)
```



2. Aufgabe

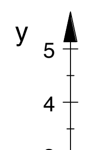
Gegeben ist nun die ganzrationale Funktion g mit $g(x) = -2 \cdot x^4 + 4 \cdot x^2$

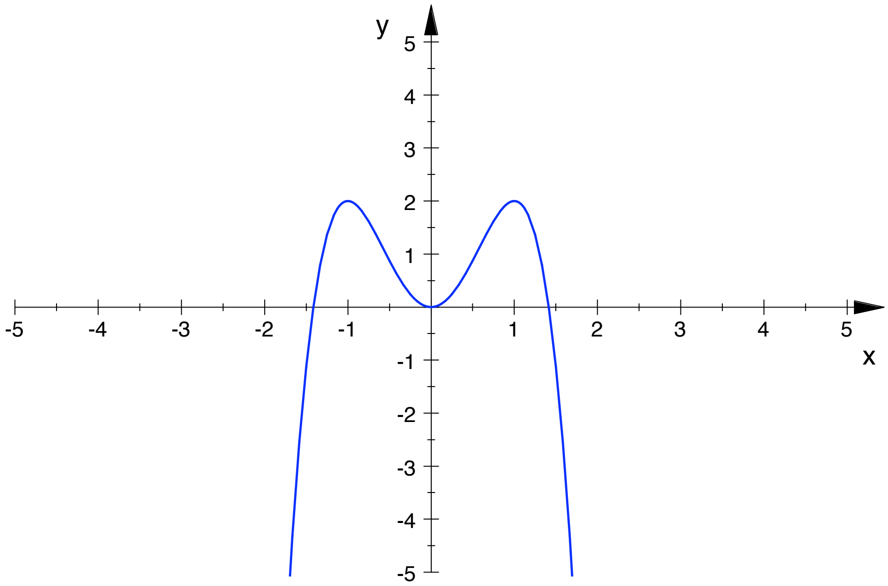
1. Beschreibe den Verlauf des Graphen der Funktion und gebe an, wo eventuelle Nullstellen,
Hoch- und Tiefpunkte sowie Wendepunkte ungefähr liegen.

Da die Funktion in der Unmgebung von 0 sich wie x^2 und global wie $-x^4$ verhält, muss eine Nullstelle bei 0 und jeweils mindestens eine weitere Nullstelle im positiv und negativ Bereich sein.
Der Graph zeigt weiter die Symmetrie zur y- Achse:

```
reset();
g := x -> -2*x^4+4*x^2;
plotfunc2d(g(x),YRange = -5..5);
```

x -> - 2*x^4 + 4*x^2





Zwischen je 2 Nullstellen muss mindestens ein Hoch oder Tiefpunkt liegen. Da bei 0 eine Nullstelle 2. Ordnung liegt auch dort eine Extremstelle , also ein Hoch- oder Tiefpunkt.

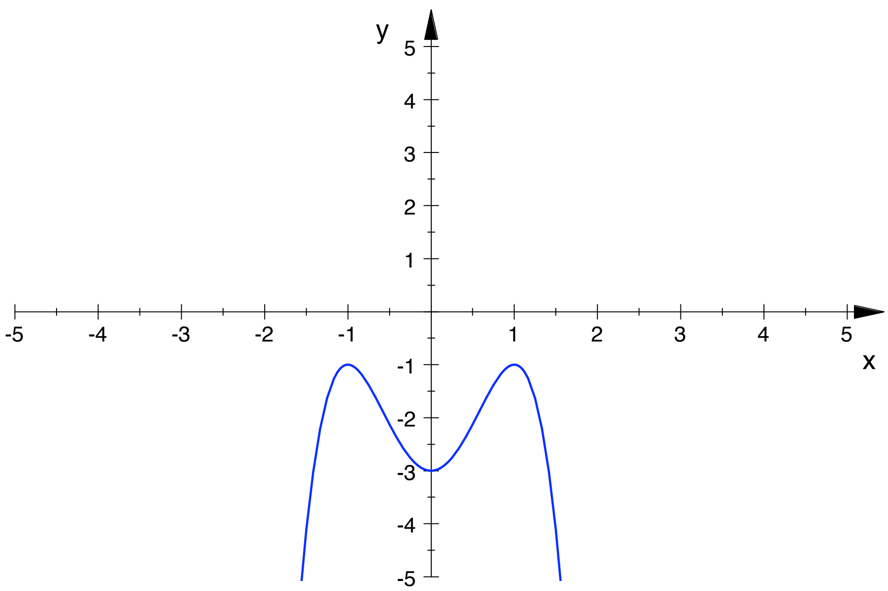
Zwischen Hoch- und Tiefpunkt liegt weiter ein Wendepunkt.

2. Welche Bedeutung haben Hoch- und Tiefpunkte sowie Wendepunkte für den Verlauf des
Graphen?

Der Hochpunkt stellt den größten Funktionswert in einer noch so kleinen Umgebung dar, der Tiiefpunkt entsprechend den kleinsten Funktionswert in einr Umgebung. Im Wendepunkt ändert der Graph seine Krümmungsverhalten, es erfolgt z.B. ein Übergang von einer Lins- zu einer Rechtskrümmung oder umgekehrt.

3. Addiere eine konstante Zahl a so zu g(x), dass
1. g keine Nullstelle hat

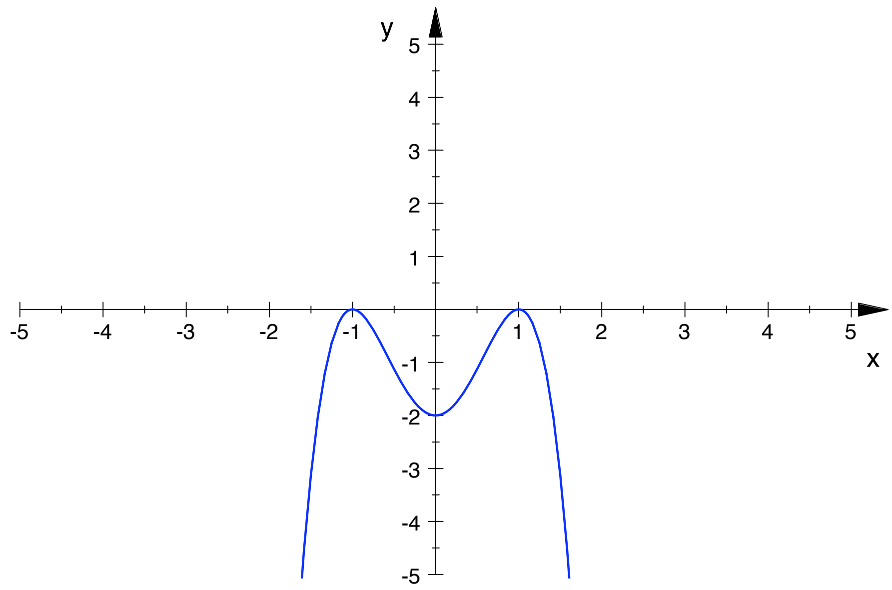
```
a :=  -3:
plotfunc2d(g(x)+a,YRange = -5..5)
```



2. g genau 2 Nullstellen hat

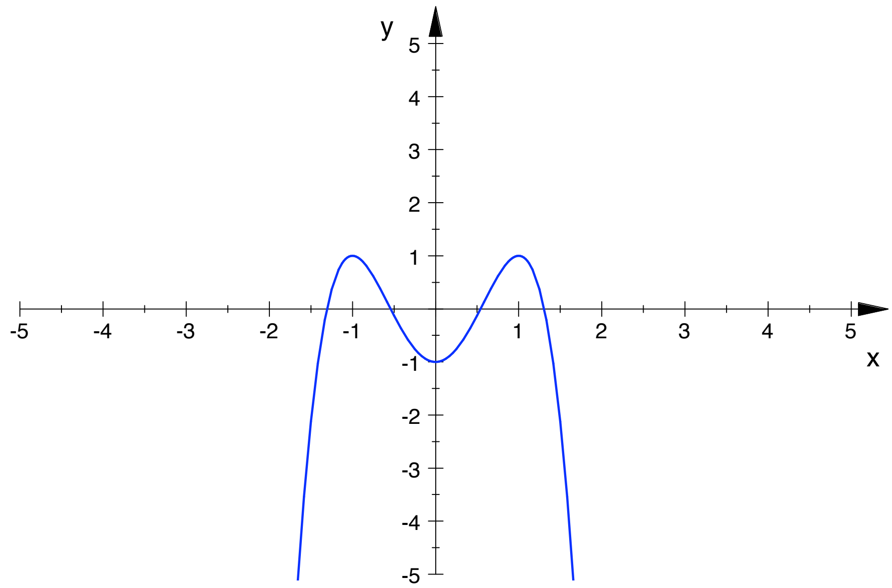

```
a :=  -2:
```

```
plotfunc2d(g(x)+a,YRange = -5..5)
```



3. g genau 4 Nullstellen hat

```
a :=  -1:
plotfunc2d(g(x)+a,YRange = -5..5)
```



4. g genau 1 Nullstelle hat

geht nicht

5. g genau 5 Nullstellen hat

geht nicht. Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat maxmal 4 Nullstellen.

3. Aufgabe
Gegeben ist die Linearfaktordarstellung einer ganzrationalen Funktion f mit

$f(x)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x+2)\cdot x$

1. Wo liegen die Nullstellen dieser Funktion?

Jeder Linearfaktor repräsentiert eine Nullstelle. Also liegen Nullstellen bei 2, -1, 3, -2, 0

2. Wie heisst der Funktionsterm in (ausmultiplizierter) Normaldarstellung.

Ausmultiplizieren liefert:

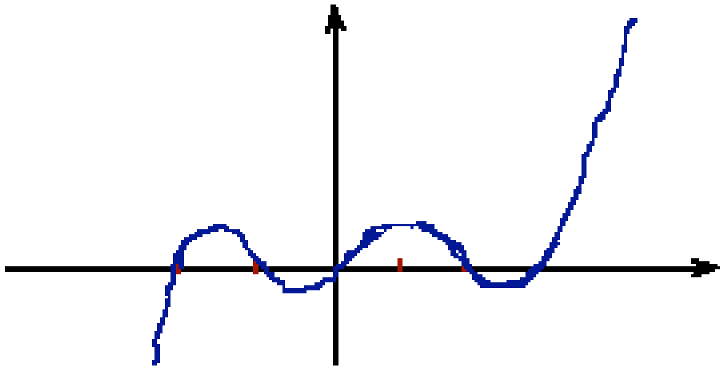
```
normal((x-2)*(x+1)*(x-3)*(x+2)*x)
```

$$x^5 - 2 \cdot x^4 - 7 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 12 \cdot x$$

3. Begründe und skizziere ohne MuPad den Graphen der Funktion f.

Die höchste Potenz ist 5 und der Koeffizient von x5 ist 1, also kommt der Graph von -unendlich und geht nach +unendlich. Durch den Ursprung verläuft der Graph wie eine Gerade mit der Steigung 12 und da alle Nullstellen einfach als Linearfaktoren vorkommen schneidet der Graph in diesen Nullstellen die x-Achse.

Dazu gehört folgende Skize:



4. Aufgabe

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x)=x^3-2\cdot x^2-5\cdot x+6$

1. Zeige, dass x = 1 eine Nullstelle von f ist und führe eine Polynomdivision von f durch den
entsprechenden Linearfaktor (x-1) durch.

```
reset();
f := x -> x^3 – 2*x^2 – 5*x + 6;
```

x -> ((x^3 - 2*x^2) - 5*x) + 6

Wir berechnen den Funktionswert an der Stelle 1 und stellen fest:

```
f(1)
```

0

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\;\;(x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)*(x^2 - x - 6) \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\qquad -x^2 - 5x + 6 \\
\quad -(-x^2 + x) \\
\hline
\qquad\qquad -6x + 6 \\
\qquad\quad -(-6x + 6) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

2. Welche Nullstellen hat das Restpolynom $f_{rest}(x)=x^2-x+6$

Die Polynomdivision geht ohne Rest auf. Die Nullstellen des Restpolynoms $(x^2 - x - 6)$ bekommt man über die pq-Formel mit p = -1 und q= -6 zu

6) bekommt man über die pq-Formel mit p = -1 und q= -6 zu

```
x1 := 0.5 + sqrt(0.5^2-(-6));
x2 := 0.5 - sqrt(0.5^2-(-6));
```

3.0

-2.0

Mit Mupad erfolgt eine Polynomdivision durch:

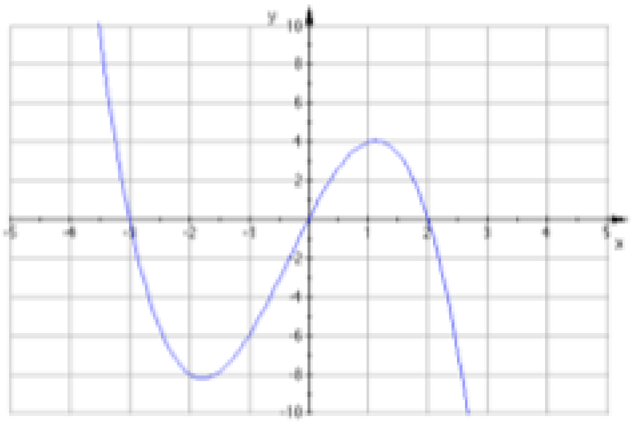
```
divide(x^3 - 2*x^2 - 5*x + 6, x-1)
```

$x^2 - x - 6, 0$

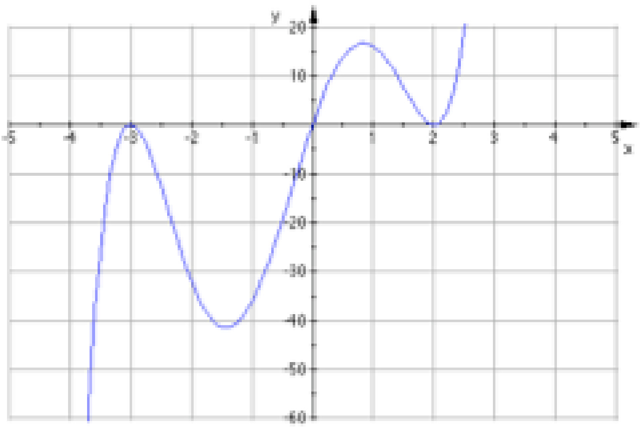
3. Welche Linearfaktordarstellung hat somit f?

f(x) = (x-1)*(x-3)*(x+2)

5. Aufgabe
Gegeben sind die folgenden Funktionsgraphen. Bestimme jeweils den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion von möglichst niedrigem Grad, der diese Funktionsgraphen erzeugen kann.
a)



a)



b)

a) 3 einfache Nullstellen -> Grad mindestens 3
von + unendlich kommend -> Koeffizient von x^3 negativ, z.B: -1
Nullstellen bei -3, 0, 2 -> Linearfaktordarstellung

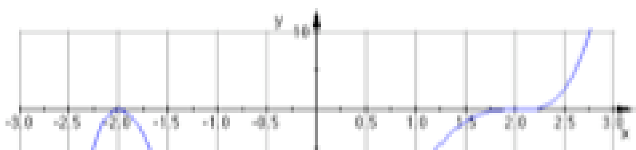
```
fa := x-> -(x+3)*x*(x-2)
```

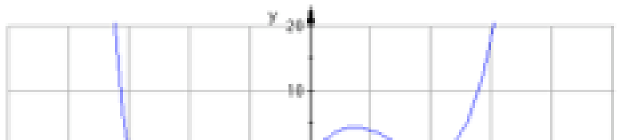
$x \to -(x+3) \cdot x \cdot (x-2)$

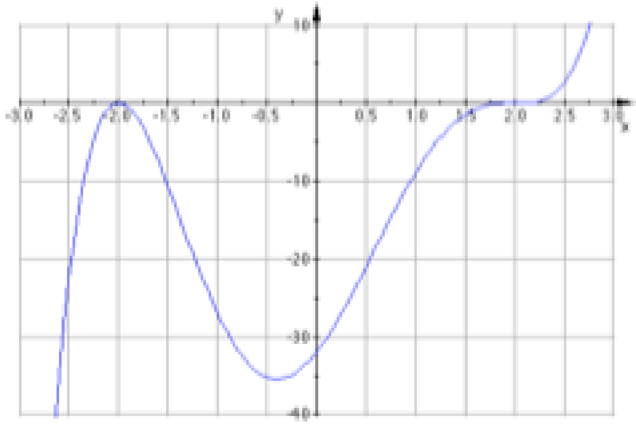
b) 1 einfache Nullstelle bei 0 , 2 doppelte Nullstellen bei -3 und 2 -> Grad mindestens 5
von - unendlich kommend -> Koeffizient von x^5 positiv, z.B: 1
Linearfaktordarstellung

```
fb := x-> (x+3)*(x+3)*x*(x-2)*(x-2)
```

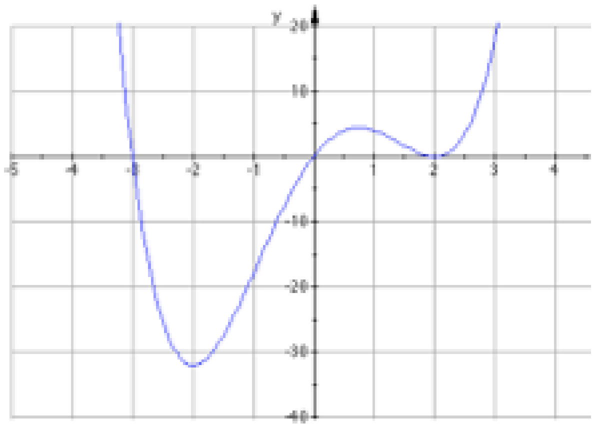

$x \to (x+3) \cdot (x+3) \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-2)$







c)



d)

c) 1 doppelte Nullstellen bei -3 , 1 dreifache Nullstelle bei +2 -> Grad mindestens 5
von - unendlich kommend -> Koeffizient von x^5 positiv, z.B: 1
Linearfaktordarstellung

```
fc := x-> (x+3)*(x+3)*(x-2)*(x-2)*(x-2)
```

$$x \to (x+3) \cdot (x+3) \cdot (x-2) \cdot (x-2) \cdot (x-2)$$

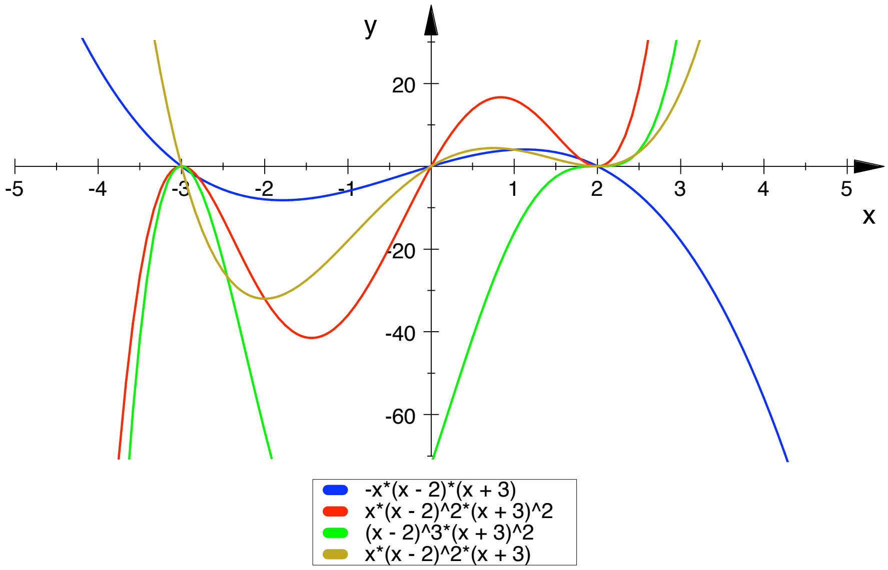
d) 2 einfache Nullstelle bei -3 und 0 , 1 doppelte Nullstelle bei +2 -> Grad mindestens 4
von + unendlich kommend -> Koeffizient von x^4 positiv, z.B: 1
Linearfaktordarstellung

```
fd := x-> (x+3)*(x)*(x-2)*(x-2)
```

$$x \to (x+3) \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-2)$$

Überprüfung mit MuPad

```
plotfunc2d(fa(x),fb(x),fc(x),fd(x),YRange=-70..30)
```



6. Aufgabe

Nimm zu den folgenden Aussagen durch entsprechende Beispiele oder Gegenbeispiele Stellung:

1. Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat n Nullstellen

Falsch. Sie hat maximal n Nullstellen, kann also weniger als n haben. Siehe z.B. Aufgabe 1 oder auch eine Parabel, die 0, 1 oder 2 Nullstellen haben kann.

2. Wenn eine ganzrationale Funktion keine Nullstelle hat dann ist der Grad gerade.

Richtig. Eine ganzrationale ungerade Funktion muss ihr Vorzeichen mindestens einmal ändern da für x -> unendlich und gegen - unendlich die Funktion in verschiedene Richtungen "geht". Also mindestens einmal eine Nullstelle bei ungeraden Funktionen. Gibt es also keine Nullstelle, dann muss die Funktion gerade sein.

3. Eine ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad hat mindestens eine Nullstelle.

Richtig. Eine ganzrationale ungerade Funktion muss ihr Vorzeichen mindestens einmal ändern da für x -> unendlich und gegen - unendlich die Funktion in verschiedene Richtungen "geht". Also mindestens einmal eine Nullstelle bei ungeraden Funktionen.

4. Eine zur y-Achse symmetrische ganzrationale Funktion hat nur gerade Exponenten.

Symmetrie zur y-Achse bedeutet: f(x) = f(-x). Bei Potenzfunktionen gilt dies aber nur wenn der Exponent gerade ist. z.B. $(x)^2 = (-x)^2$ Besitzt ein Funktionsterm also nur gerade Exponenten dann gilt f(x)= f(-x) und damit ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.