Lösungen zum Wochenplan Ableitungen

1. Aufgabe

Gegeben sind im folgenden die Funktionen mit dem Termen:

a) $f(x)=2\cdot x^2$

b) $g(x)=-x^4$

c) $h(x)=\sqrt{x}$

1. Ermittle die Ableitung der Funktion an den Stellen a=2; b=5 und c=-3 durch
des Differenzenquotienten
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
.
2. Überprüfe das Ergebnis durch Benutzung von $f'(x)$.
3. Ermittle auch die Vorschrift der Tangenten durch die geg. Stellen a,b und c.

```
f := x-> 2*x^2;
g := x-> -x^4;
k := x-> sqrt(x);
```

$$x \to 2\cdot x^2$$

$$x \to -x^4$$

$$x \to \sqrt{x}$$

Wir können den Differenzenquotienten an den Stellen a,b,c auch als Funktion von h definieren

```
dq_f_a := h->(f(2+h)-f(2))/h;
dq_f_b := h->(f(5+h)-f(5))/h;
dq_f_c := h->(f(-3+h)-f(-3))/h;
```

$$h \to \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

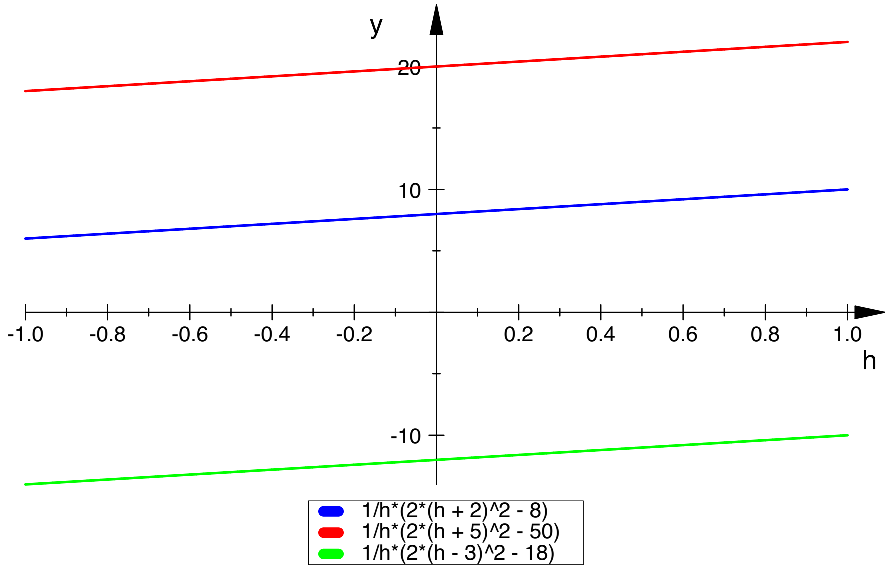
$$h \to \frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

$$h \to \frac{f(h-3)-f(-3)}{h}$$

Wir lassen die Funktionen grafisch darstellen:

```
plotfunc2d(dq_f_a(h),dq_f_b(h),dq_f_c(h),h=-1..1)
```

```
plotfunc2d(dq_f_a(h),dq_f_b(h),dq_f_c(h),h=-1..1)
```



oder bestimmen die Werte in Abh von h in Form der in der Schule verwendeten Tabelle oder

```
dq_f_a(h) $ h in {-1,-0.5,-0.1,-0.001,0.001,0.1,0.5,1}
```

6, 7.0, 7.8, 7.998, 8.002, 8.2, 9.0, 10

Es ist zu sehen, wie für h->0 der Differenzenquotient gegen 8 strebt.
Analog für die anderen Stellen

```
dq_f_b(h) $ h in {-1,-0.5,-0.1,-0.001,0.001,0.1,0.5,1};
dq_f_c(h) $ h in {-1,-0.5,-0.1,-0.001,0.001,0.1,0.5,1}
```

18, 19.0, 19.8, 19.998, 20.002, 20.2, 21.0, 22

$-14, -13.0, -12.2, -12.002, -11.998, -11.8, -11.0, -10$

2) Vermutung: f'(a)=8, f*(b) = 20 und f'(c)=-12
Nachweis durch Ausrechnen lassen der Ableitung

```
f'(2); f'(5);f'(-3);
```

8

20

-12

Analog die Lösungen für die anderen Funktionen
3) Für die Tangente in der Stelle a glt:


```
ta := x->m*x+b;
m := f'(2);
```

```
m := f'(2);
b := f(2)-f'(2)*2;
```

$x \to m \cdot x + b$

8

-8

Also heisst die Tangente konkret;

```
ta := x-> 8*x-8;
```

$x \to 8 \cdot x - 8$

Für eine beliebige Funktion f an einer bel. Stelle a gilt für die Tangente:

```
delete f;
t := x-> m*x+b;
m := f'(a);
b := f(a) - f'(a)*a;
t(x);
```

$x \to m \cdot x + b$

$f'(a)$

$f(a) - a \cdot f'(a)$

$f(a) - a \cdot f'(a) + x \cdot f'(a)$

Jetzt kann man z.B. die anderen Funktionen und Stellen einsetzen

2. Aufgabe

Gegeben ist nun die ganzrationale Funktion g mit $g(x) = -2 \cdot x^4 + 4 \cdot x^2$

2. Aufgabe

Gegeben ist nun die ganzrationale Funktion g mit $g(x) = -2 \cdot x^4 + 4 \cdot x^2$

1. Beschreibe den Verlauf des Graphen der Funktion und gebe an Hoch- und Tiefpunkte sowie Wendepunkte ungefähr liegen.
2. Ermittle die Ableitungsfunktion $g'(x)$ und erstelle ein gemeir Graphen.
3. Erweitere das Schaubild zur Animation mit Wandertangente an

a) Definition der Funktion und Zeichnen des Graphen

```
reset();
```

```
g := x-> -2*x^4+4*x^2
```

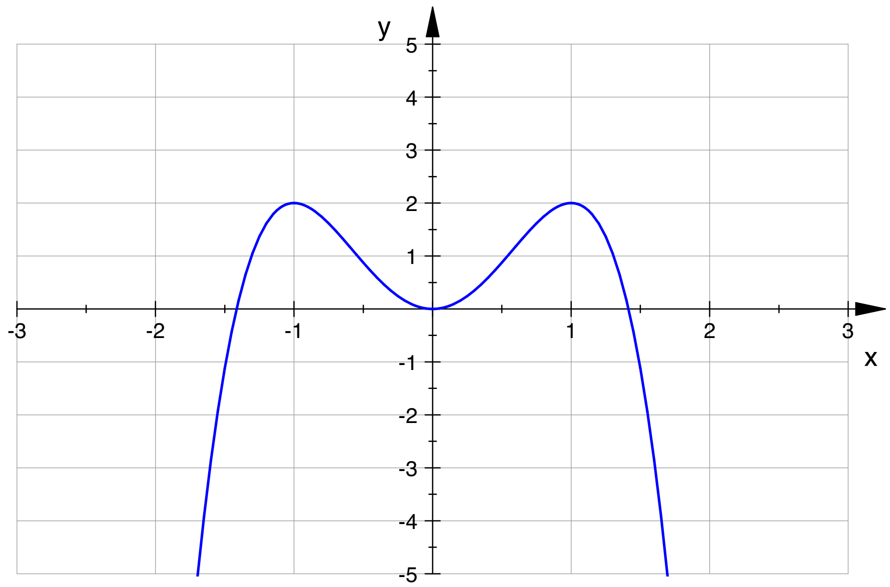
$$x \rightarrow 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x^4$$

Nullstellen

```
solve(g(x)=0,x)
```

$$\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

```
plotfunc2d(g(x),x=-3..3,YRange=-5..5,GridVisible)
```



Der Graph der Funktion steigt zunächst bis x=-1 an, hat dort einen Hochpunkt (-1I2), fällt dann wieder bis x=0, dort hat er einen Tiefpunkt (0I0), steigt dann wieder bis x=1, hat dort den Hochpunkt (1I2) und fällt dann wieder. Nullstellen liegen ca. bei x = -1.4, 0, 1.4 . Wendepunkte scheinen bei ca W1 (-0.5I1) und W2 (0[redacted]

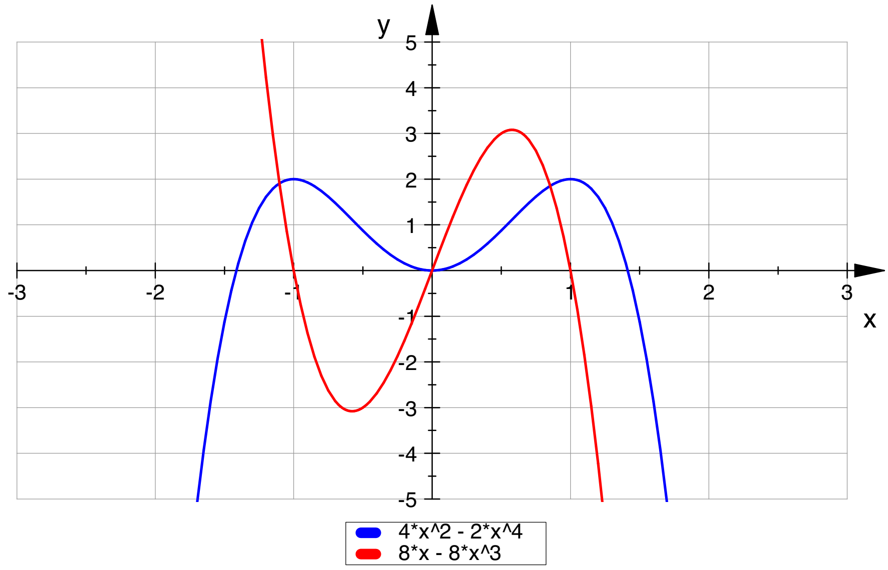
b) Anwendung von Summen-,Faktor- und Potenzregel liefert g'(x)= $-8 \cdot x^3 + 8 \cdot x$

oder

oder

```
g'(x);
plotfunc2d(g(x),g'(x),x=-3..3,YRange=-5..5,GridVisible)
```

$$8 \cdot x - 8 \cdot x^3$$



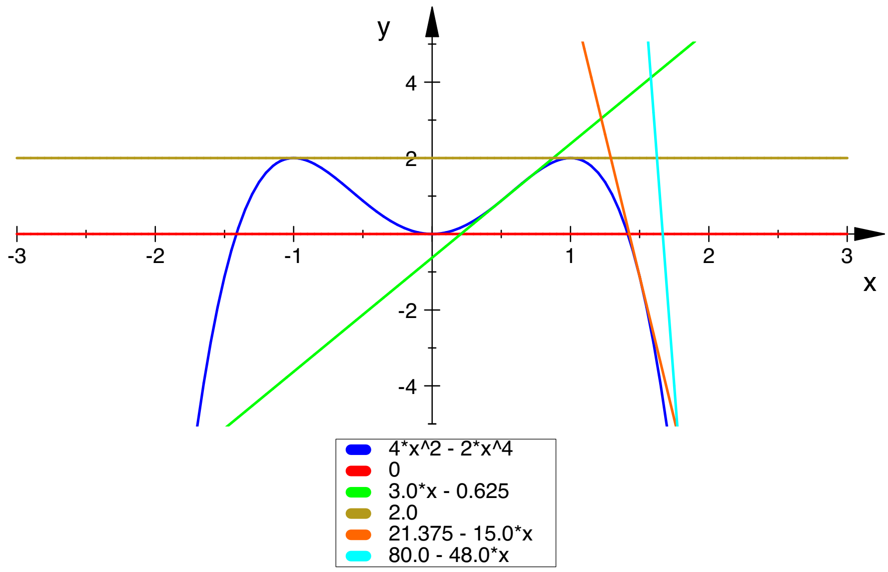
c) Wandertangente
Wie bereits unter Aufgabe 1.3 hergeleitet gilt für die Tangente an den Grapgen von g im Punkt (a I g(a))

```
t := x-> g'(a)*x + (g(a)-g'(a)*a)
```

$$x \to g'(a) \cdot x + g(a) - g'(a) \cdot a$$

Die Tangenten an den Stellen a=0,1,2 lassen sich also zeichnen durch

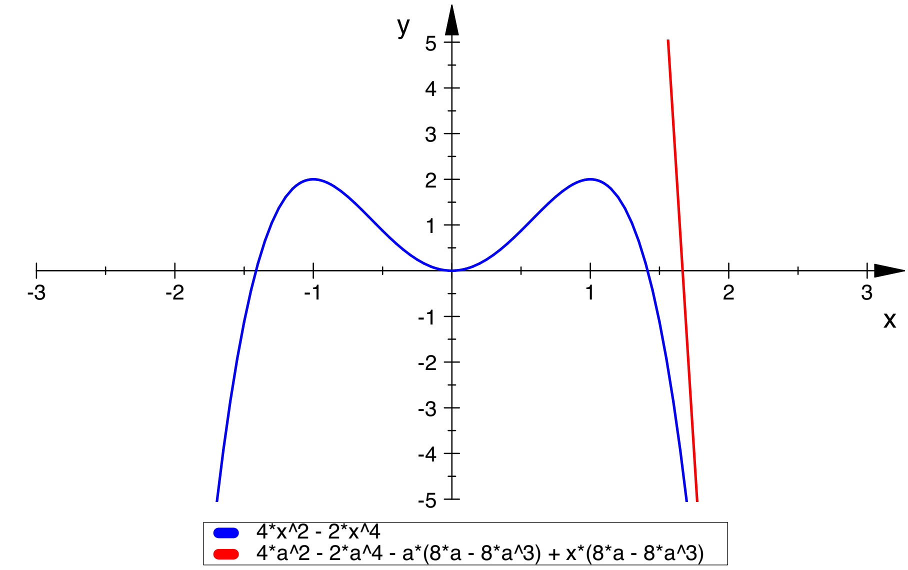
```
plotfunc2d(g(x),t(x) $ a = 0..2 step 0.5,x=-3..3,YRange=-5..5)
```



oder als Animation

oder als Animation

```
plotfunc2d(g(x),t(x),x=-3..3,a=-2..2,YRange=-5..5)
```



+

3. Aufgabe siehe Unterrichtsaufzeichnungen dazu

4. Aufgabe

Nimm zu den folgenden Aussagen durch entsprechende Beispiel oder

1. Eine lineare Funktion hat eine konstante Ableitung.
2. Jede Potenzfunktion x^m kann bis zur 0 abgeleitet werden.
3. Es gibt eine Funktion, für die gilt: $f'(x)=f(x)$.
4. Eine zum Ursprung symmetrische Funktion hat eine achsensym Ableitungsfunktion $f'(x)$ und umgekehrt.

1. Ist richtig da der Graph einer lin. Funktion eine Gerade ist und diese eine konstante Steigung hat. z.B. f(x)= 2*x+1 hat die konstante Steigung 2 und f'(x) = 2

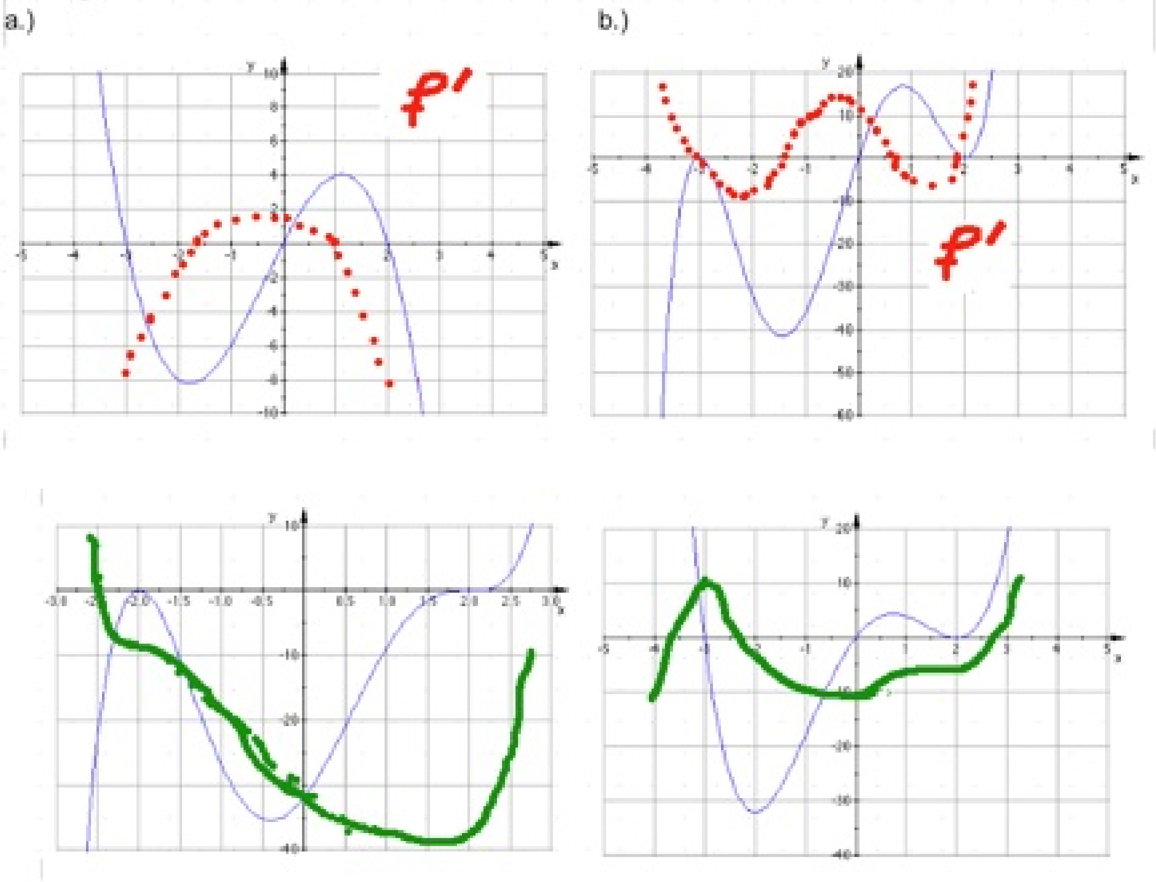
2. Ist richtig für natürliche Werte von m, die 1. Abl. von x^m ist $m*x^{(m-1)}$, m-maliges Ableiten liefert also $f^{m(x)}$ = m*(m-1)*...*x^{m-m}, noch einmal ableiten liefert also 0

3. Heisst ja, dass die Änderungsrate der Funktion genau so groß ist wie der Funktionswert selbst. Könnte also eine Exponentialfunktion sein da bei denen ja die Änderung der Funktionswerte proportional zum bestehenden Funktionswert ist.

4. Ist richtig, Beispiel ist die Funktion g aus der Aufgabe 2, die ist symm. zur y-Achse (hat nur gerade Exponenten) und die Ableitungsfunktion hat nur

ungerade Exponenten ist also sym. zum Ursprung.

5. Aufgabe



Mögliche Lösungen bei a,b sind für die Funktionen:

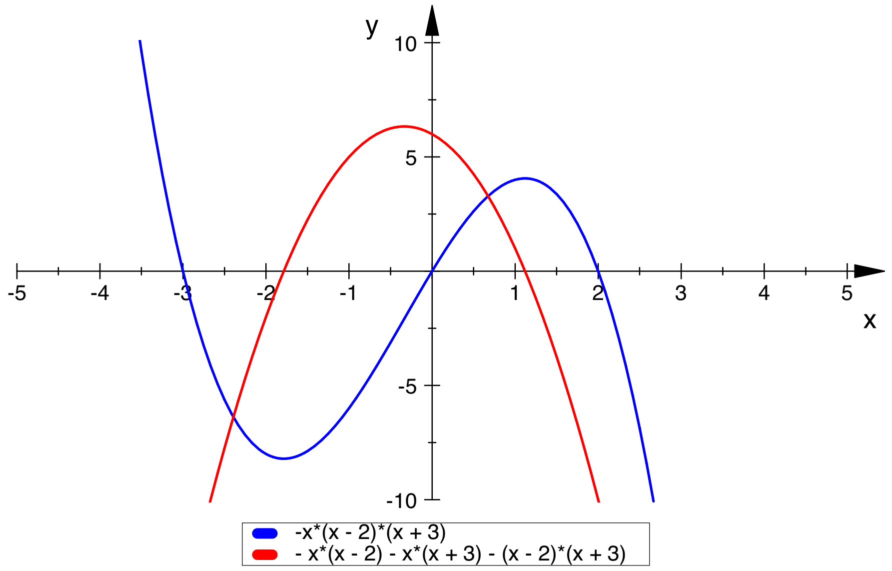
```
f := x-> -(x+3)*(x-0)*(x-2);
g := x-> (x+3)^2*(x-0)*(x-2)^2;
```

$$x \rightarrow -(x+3)\cdot(x-0)\cdot(x-2)$$

$$x \rightarrow (x+3)^2\cdot(x-0)\cdot(x-2)^2$$

Zur Überprüfung lassen wir f und g sowie die Ableitungen f' und g' zeichnen:

```
plotfunc2d(f(x),f'(x),x=-5..5,YRange=-10..10)
```


```
plotfunc2d(g(x),g'(x),x=-5..5,YRange=-60..40)
```