Sveriga Kronenberg

Thema: Kurvendiskussion, Wendestellen und Tangenten

Arbeitsblatt: Lambacher Schweizer Analysis

```
reset() // Entleert sämtliche Speicher
```

```
assume(Type::Real) // Definiert die Definitionsmenge über reele
```

$\mathbb{R}$

Aufgabe 2)
f)

```
f:=x->1/10*x^5-4/3*x^3+6*x // Definition einer Funktion mit der Variable "x"
```

$x \to \frac{x^5}{10} - \frac{4 \cdot x^3}{3} + 6 \cdot x$

2/2

---

1. Schritt: Ableitungen

```
f'
```

$x \to \frac{x^4}{2} - 4 \cdot x^2 + 6$

```
f''
```

$x \to 2 \cdot x^3 - 8 \cdot x$

```
f'''
```

$x \to 6 \cdot x^2 - 8$

---

2. Schritt: Symmetrie

```
bool(f(x)=f(-x)) // Achsensymmetrie zur Y-Achse
```

FALSE

```
bool(f(-x)=-f(x)) // Punktsymmetrie zum Ursprung
```

TRUE

Die Funktion besitzt nur ungerade Exponenten, daher ergibt sich eine Punktsymmetrie zum Ursprung.

2/2

---

3. Schritt: Nullstellen

```
solve(f(x)=0,x) // Schnitte mit der x-Achse
```

{0}

x_0_1= 0

NST bei (0 | 0).

1/1

---

4. Schritt: Schnitt mit der y-Achse:

```
f(0)
```
0

Der y-Achsenabschnitt liegt bei y=0 und dementsprechend auf dem Ursprung.

---

5. Schritt: Verhalten für |x| -> unendlich / "Globales Verlhalten"

```
limit(f(x),x=+infinity)
```
∞

```
limit(f(x),x=-infinity)
```
$-\infty$

---

6. Schritt: Extremstellen

```
solve(f'(x)=0,x) // Notwendige Bedingung für Extrema
```
$\{-\sqrt{2}, -\sqrt{6}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$

```
float(solve(f'(x)=0,x))
```
$\{-2.449489743, -1.414213562, 1.414213562, 2.449489743\}$

Mögliche Extremstellen
x_e_1= -2.449
x_e_2= -1.414
x_e_3= +1.414
x_e_4= +2.449

Bestimmen, ob ein Hochpunkt (HP), ein Tiefpunkt (TP) oder ein Sattelpunkt (SP) vorliegt:
Hinreichende Bedingung für Extrema:

1. Vorgehensweise:

x_e_1= -2.449

```
f'(-2.8)
```
5.3728

```
f'(-2.3)
```
-1.16795

VZW von + zu - -> Hochpunkt (HP) an der Stelle x_e_1=-2.449.

x_e_2= -1.414

```
f'(-1.5)
```
-0.46875

```
f'(-1.3)
 0.66805
```

VZW von - zu + -> Tiefpunkt (TP) an der Stelle x_e_2= -1.414.

x_e_3= +1.414

```
f'(+1.3)
 0.66805
f'(+1.5)
 -0.46875
```

VZW von + zu - -> Hochpunkt (HP) an der Stelle x_e_3= +1.414.

x_e_4= 2.449

```
f'(2.3)
 -1.16795
f'(2.6)
 1.8088
```

VZW von - zu + ->Tiefpunkt (TP) an der Stelle x_e_4= 2.449.

2. Vorgehensweise

x_e_1= -2.449

```
f''(-2.449)
 -9.784249698
```

x_e_2= -1.414

```
f''(-1.414)
 5.657708112
```

x_e_3= +1.414

```
f''(+1.414)
 -5.657708112
```

x_e_4= +2.449

```
f''(2.449)
 9.784249698
```

f''(x)<0 (negativ)->HP an den Stellen x_e_1= -2.449 und x_e_3= +1.414.
f''(x)>0 (positiv)-> TP an den Stellen x_e_2=-1.414 und x_e_4= +2.449.

"Lokal" oder "Global":
Im Vergleich mit dem 5. Schritt: Verhalten für |x| -> unendlich / "Globales Verhalten" kann es keine globalen Extrema geben, da der Funktionsgraph sowohl ins negativ als auch in das positiv unendliche strebt.

Daher sind alle gefundenen **Extrema lokal**.

Ermitteln der jeweiligen y-Werte der Extremstellen:

```
f(-2.449)
 -3.919184763
```

HP bei (-2.449 | -3.919)

```
f(-1.414)
 -5.279730504
```

TP bei (-1.414 | -5.279)

```
f(1.414)
 5.279730504
```

HP bei (+1.414 | 5.279)

```
f(2.449)
 3.919184763
```

TP bei (2.449 | 3.919)

6/6

---

7. Schritt: Wendestellen

```
solve(f''(x)=0,x) // Notwendige Bedingung für Wendestellen
 {-2, 0, 2}
```

Mögliche Wendestellen bei x_w_1= -2, x_w_2= 0, x_w_3= 2

Bestimmen, ob WP oder SP vorliegt:
Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

1. Vorgehensweise:

x_w_1= -2

```
f''(-2.1)
 -1.722
```

```
f''(-1.9)
 1.482
```

VZW der zweiten Ableitung von - zu + -> WP mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle x_w_1= -2.

x_w_2= 0

```
f''(-0.1)
 0.798
```

```
f''(0.1)
 -0.798
```

```
-0.798
```

VZW der zweiten Ableitung von + zu - -> WP mit Links-Rechts-Krümmung an der Stelle x_w_2= 0.

x_w_3= 2

```
f''(1.9)
-1.482
f''(2.1)
1.722
```

VZW der zweiten Ableitung von - zu + -> WP mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle x_w_3= 2.

---

2. Vorgehensweise:

x_w_1= -2

```
f'''(-2)
16
```

x_w_2= 0

```
f'''(0)
-8
```

x_w_3= +2

```
f'''(2)
16
```

f'''(x) > 0 (positiv)-> TP der ersten Ableitung -> WP mit Rechts-Links-Krümmung an den Stellen x_w_1= -2 und x_w_3= +2.

f'''(x)< 0 (negativ)-> HP der ersten Ableitung -> WP mit Links-Rechts-Krümmung an der Stelle x_w_2= 0.

Ermitteln der jeweiligen y-Werte der Wendestellen:

```
f(-2)
-68/15
```

WP1 bei (-2 | -68/15)

```
float(f(-2))
-4.533333333
float(-68/15)
-4.533333333
```

WP1 bei (ca. -2 | ca. -4,53)


```
f(0)
0
```

```
0
```

WP2 bei (0 | 0)

```
f(2)
68/15
```

```
float(68/15)
4.533333333
```

WP3 bei (2 | ca. 4.53)

1/1

---

8. Schritt: Monotonie- Intervalle:
Aus 6. Schritt: Ermitteln der Extrempunkte folgt mit

x_e_1= -2.449 => HP (VZW in f' von + zu -)
x_e_2= -1.414 => TP (VZW in f' von - zu +)
x_e_3= +1.414 => HP (VZW in f' von + zu -)
x_e_4= +2.449 => TP (VZW in f' von - zu +) ,
dass es insgesamt fünf verschiedene Monotonieintervalle geben muss:

I: (-unendlich; -2.449) : G_f streng monoton steigend (f'(x)> 0 <=> f' positiv)
II: (-2.449; -1.414): G_f streng monoton fallend (f'(x)<0 <=> f' negativ)
III: (-1.414; +1.414): G_f streng monoton steigen (f'(x)>0 <=> f' positiv)
IV: (+1.414; +2.449): G_f streng monoton fallend (f'(x)<0 <=> f'negativ)
V: (+2.449;+unendlich): G_f streng monoton steigend (f'(x)>0 <=> f' positiv)

2/2

---

9. Schritt: Wendetangente
Wir wissen:
WP1 mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle x_w_1= -2 mit (-2 | -68/15).
WP2 mit Links-Rechts-Krümmung an der Stelle x_w_2= 0 mit (0 | 0).
WP3 mit Rechts-Links-Krümmung an der Stelle x_w_3=2 mit (2 | +68/15).

Für die Tangentengleichung benötigen wir:
*Steigung m
*Y-Achsenabschnitt b:

```
m:=f'(-2)
-2
```

```
m:=f'(0)
6
```

```
m:=f'(2)
-2
```



```
b:=solve(f'(-2)*-2+b=-68/15,b)
{-128/15}
```

$$\left\{-\frac{128}{15}\right\}$$

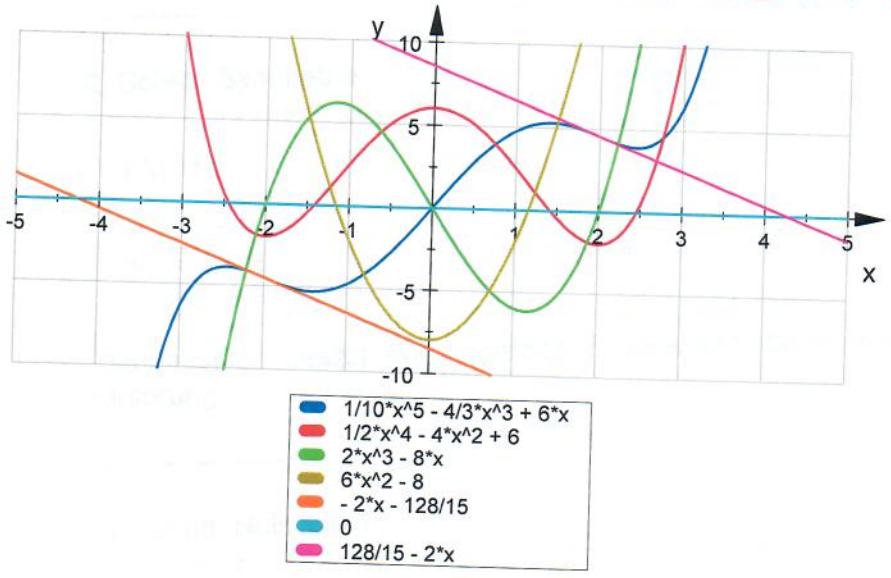
```
h:=solve(f'(0)*0+h=0,h)
```
$$\{0\}$$
```
g:=solve(f'(2)*2+g=68/15,g)
```
$$\left\{\frac{128}{15}\right\}$$

Daraus folgen die Tangentenfunktionsgleichungen:

```
t:=x->m*x+b
```
$$x \to m \cdot x + b$$

mit

```
t_w_1:=x->-2*x-128/15
```
$$x \to -2 \cdot x - \frac{128}{15}$$
```
t_w_2:=x->0*x+0
```
$$x \to 0 \cdot x + 0$$
```
t_w_3:=x->-2*x+128/15
```
$$x \to \frac{128}{15} - 2 \cdot x$$

10.Schritt: Zeichnung des Graphen (f, f', f'', f''' und Wendetangenten t_w_1, t_w_2, t_w_3)

```
plotfunc2d(f(x), f'(x), f''(x),f'''(x), t_w_1(x), t_w_2(x), t_w_3(x),x=-5..5,
```