ALGEBRA

Logarithmen

Trainingsaufgaben

SAMMLUNG von Aufgaben
aus allen wichtigen Bereichen

Wird erweitert

Datei Nr. 12850

Stand 24. August 2011

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Vorwort

Logarithmen sind bei den Schülern unbeliebt, denn das Arbeiten mit ihnen kommt nicht so häufig vor. Daher benötigt man Trainingsaufgaben.

Die vorliegende Sammlung bietet zu allen wichtigen Aufgaben reichlich Material. Auf der Mathematik-CD sind alle Lösungen ausführlich vorhanden.

§1. Berechnung von Logarithmen

Aufgabe 101: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Natürliche Zahl

(a)	$\log_2 64$	(b)	$\log_3 81$	(c)	$\log_9 3$	(d)	$\log_7 1$
(e)	$\log_{16} 2$	(f)	$\log_{32} 2$	(g)	$\log_5(-5)$	(h)	$\log_8 4$
(i)	$\log_{16} 8$	(j)	$\log_{27} 9$	(k)	$\log_{27} 243$	(l)	$\log_9 27$

Aufgabe 102: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Bruchzahl

(a)	$\log_{27} \frac{1}{27}$	(b)	$\log_2 \frac{1}{2}$	(c)	$\log_2 \frac{1}{8}$	(d)	$\log_{13} \frac{1}{169}$
(e)	$\log_4 \frac{1}{64}$	(f)	$\log_2 \frac{1}{32}$	(g)	$\log_3 \frac{1}{81}$	(h)	$\log_{32} \frac{1}{2}$
(i)	$\log_{16} \frac{1}{8}$	(i)	$\log_{27} \frac{1}{3}$	(k)	$\log_{64} \frac{1}{8}$	(l)	$\log_{32} \frac{1}{4}$

Aufgabe 103: Basis: Bruchzahl ; Argument: Natürliche Zahl oder Bruchzahl

(a)	$\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81}$	(b)	$\log_{\frac{1}{2}} 2$	(c)	$\log_{\frac{1}{4}} 16$	(d)	$\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$
(e)	$\log_{\frac{1}{4}} 2$	(f)	$\log_{\frac{1}{9}} 27$	(g)	$\log_{\frac{1}{25}} 125$	(h)	$\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{8}$
(i)	$\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{27}$	(j)	$\log_{\frac{1}{25}} \frac{1}{125}$	(k)	$\log_{\frac{8}{27}} \frac{3}{2}$	(l)	$\log_{\frac{1}{16}} 4$

Aufgabe 104: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Quadratwurzeln

(a)	$\log_2 \sqrt{2}$	(b)	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$	(c)	$\log_8 2\sqrt{2}$	(d)	$\log_3 \sqrt{3}$
(e)	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$	(f)	$\log_3 \sqrt{27}$	(g)	$\log_5 \frac{1}{25\sqrt{5}}$	(h)	$\log_4 \sqrt{2}$
(i)	$\log_8 \sqrt{2}$	(j)	$\log_9 \sqrt{3}$	(k)	$\log_8 \sqrt{\frac{1}{2}}$	(l)	$\log_{16} \frac{1}{\sqrt{8}}$
(m)	$\log_9 \frac{1}{\sqrt{3}}$	(n)	$\log_{16} \frac{1}{\sqrt{32}}$	(o)	$\log_{25} \frac{1}{5\sqrt{5}}$	(p)	$\log_{64} \frac{8}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 105: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Wurzeln

(a)	$\log_2 \sqrt[3]{2}$	(b)	$\log_2 \sqrt[5]{4}$	(c)	$\log_3 \sqrt[4]{27}$	(d)	$\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$
(e)	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$	(f)	$\log_4 \sqrt[3]{2}$	(g)	$\log_9 \sqrt[5]{27}$	(h)	$\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
(i)	$\log_8 \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	(j)	$\log_6 \sqrt[5]{36}$	(k)	$\log_{81} \frac{1}{\sqrt{27}}$	(l)	$\log_6 \sqrt[3]{9}$

Aufgabe 106: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Schwere Wurzeln

(a)	$\log_2 \sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4}$	(b)	$\log_3 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}$	(c)	$\log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}$
(d)	$\log_2 \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$	(e)	$\log_3 \sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}$	(f)	$\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3}}$
(g)	$\log_{32} \sqrt{\frac{8}{\sqrt{2}}}$	(h)	$\log_8 \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	(i)	$\log_4 \sqrt{\sqrt[3]{8}}$
(j)	$\log_3 \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}$	(k)	$\log_4 \sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{2}}$	(l)	$\log_4 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{4}}$
(m)	$\log_{32} \sqrt[3]{4\sqrt{8}}$	(n)	$\log_{16} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$	(o)	$\log_{27} \frac{3}{\sqrt[3]{81}}$

Aufgabe 107: Basis: Bruchzahl; Argument: Wurzeln

(a)	$\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{2}$	(b)	$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{2}$	(c)	$\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{3}$	(d)	$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$
(e)	$\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3}$	(f)	$\log_{\frac{25}{16}} \frac{2}{\sqrt{5}}$	(g)	$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{128}$	(h)	$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$
(i)	$\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{16}$	(j)	$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$	(k)	$\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{32}$	(l)	$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{\sqrt{8}}$

Aufgabe 108: Basis: Wurzel; Argument: Natürliche Zahl oder Bruchzahl

(a)	$\log_{\sqrt{5}} 5$	(b)	$\log_{\sqrt[3]{2}} 2$	(c)	$\log_{\sqrt{5}} 125$	(d)	$\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$
(e)	$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$	(f)	$\log_{\sqrt{3}} 27$	(g)	$\log_{\sqrt[4]{2}} 8$	(h)	$\log_{\sqrt[3]{3}} \frac{1}{9}$
(i)	$\log_{\sqrt[3]{4}} 2$	(j)	$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$	(k)	$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{1}{4}$	(l)	$\log_{\frac{1}{\sqrt[5]{16}}} \frac{1}{8}$

Aufgabe 109: Basis: Wurzel; Argument: Wurzel

(a) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$ (b) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{27}}$ (c) $\log_{\sqrt[4]{5}} \sqrt{5}$ (d) $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{2}$

(e) $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{1}{\sqrt{125}}$ (f) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{25}$ (g) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ (h) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9}$

(i) $\log_{\sqrt{9}} \sqrt[3]{9}$ (j) $\log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt[3]{4}$ (k) $\log_{\sqrt[3]{4}} \sqrt[5]{2}$ (l) $\log_{\sqrt[4]{27}} \sqrt[5]{9}$

Aufgabe 110: Basis: Wurzel; Argument: Wurzel – Schwer !

(a) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{8}$ (b) $\log_{\frac{1}{\sqrt{8}}} \sqrt{2}$ (c) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \sqrt[4]{2}$ (d) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

(e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ (f) $\log_{\sqrt[4]{27}} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{81}}$ (g) $\log_{\sqrt{27}} \frac{\sqrt{3}}{3}$ (h) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2}}}$

§2. Logarithmengesetze

(Variable wie a, b, x, y usw. seien stets positiv,
denn das Argument und die Basis eines Log muss positiv sein!)

Die 3 Potenzgesetze $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ und $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

lassen sich in Hochzahlenregeln, die sogenannten Logarithmusgesetze umformen:

$$\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (1)}$$

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad (2)}$$

$$\boxed{\log_a x^n = n \cdot \log_a x \qquad (3)}$$

Ein Spezialfall von (2) oder (3) ist $\boxed{\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \qquad (4)}$

Es gibt mehrere Anwendungsmöglichkeiten für sie:

Beispiel 1: Fasse zusammen

$$\log_3 54 - \log_3 \sqrt{108} + \log_3 \sqrt{27} = \log_3 \frac{54 \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{108}} = \log_3 \frac{54 \cdot 3 \cdot \cancel{\sqrt{3}}}{6\cancel{\sqrt{3}}} = \log_3 27 = 3$$

Beispiel 2: Fasse zusammen

$$\log_a x^5 - \log_a x^2 + \log_a 4x^3 = 5 \cdot \log_a x - 2 \cdot \log_a x + \log_a 4 + 3 \cdot \log_a x = 6 \cdot \log_a x + \log_a 4$$

Dies kann man wieder zusammenfassen: $= \log_a x^6 + \log_a 4 = \log_a (4x^6)$

Dieselbe Aufgabe kann man auch anders lösen:

$$\log_a x^5 - \log_a x^2 + \log_a 4x^3 = \log_a \frac{x^5 \cdot 4x^3}{x^2} = \log_a 4x^6$$

Aufgabe 201 Fasse zusammen und berechne

(a) $\log_3 45 + \log_3 15 - \log_3 75$ (b) $\log_{10} 4 + \log_{10} 5 - \log_{10} 2$

(c) $2 \cdot \log_a 15 - 3 \cdot \log_a 3$ (d) $2\log_{25} 4 + \log_{25} 5 - 4\log_{25} 2$

(e) $\frac{1}{3}\log_{\sqrt{6}} 27 + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 4$ (f) $2\log_8 \frac{1}{2} + 3 \cdot \log_8 2$

(g) $\log_3 \frac{3}{4} + \log_3 \frac{8}{11} - \log_3 \frac{54}{11}$

Aufgabe 202 Vereinfache so weit wie möglich

(a) $\log_2 x^2 - \log_2 x$ (b) $\log_3 x^3 - \log_3 \dfrac{1}{x^2}$

(c) $\log_5 (ab) - \log_5 (a^2 b)$ (d) $\log_4 x + \log_4 \frac{1}{x}$

(e) $\log_{10} \dfrac{1}{x} - \log_{10} \dfrac{2}{x}$ (f) $\log_7 x^3 - \log_7 \sqrt{x}$

(g) $\log_3 (2u) - 2\log_3 u + \log_3 u^2 + \log_3 \frac{1}{u}$

(h) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt{4x} + \log_2 \left(\frac{1}{2}x^2\right) + \log_2 4$

Aufgabe 203 Vereinfache so weit wie möglich

(a) $\log_3 (a^2) - 2 \cdot \log_3 (a^4)$ (b) $\log_5 \sqrt{b} + \log_5 \sqrt{\dfrac{a}{b}} - \log_5 \sqrt{5}$

(c) $\log_2 a^5 + \log_2 \dfrac{1}{a^2} - \log_2 \dfrac{a^3}{2} + \log_2 8$

(d) $\log_a 6 + \log_a (21a) - \log_a 63 + \log_a \sqrt{a}$

Aufgabe 204 Fasse zusammen und vereinfache

(a) $\log_a x^2 + \log_a x^5 - \log_a x^6$ (b) $\log_a 4x + \log_a 4x^3 + \log_a 2x^2$

(c) $\log_a \frac{1}{x} + \log_a \sqrt{x} - \log_a x^3$ (d) $\log_a \frac{5}{x} + \log_a \frac{x}{5} - \log_a \sqrt[3]{x^2}$

(e) $2 \cdot \log_7 (2\sqrt{a}) - \log_7 (7a) + \log_7 \frac{7}{4}$

Aufgabe 205 Fasse zusammen und berechne

(a) $\log_b \frac{b}{a} + \log_b(a^2) - \log_b(a\sqrt{b})$ (b) $\log_a a^3 - \log_a b^2 + 2\log_a \frac{b}{a}$

(c) $\log_a \sqrt{ab} + \log_a \frac{b}{a^2} - \frac{3}{2}\log_a(ab)$ (d) $\left(\log_2 u^2 - \log_2 u + \log_2 \sqrt{u}\right) : \log_2 u^3$

Aufgabe 206 Fasse zusammen und berechne

(a) $\log_a(a^2-9) - \log_a(a^2+3a) - \log_a(a-3)$ für $a > 3$

(b) $\log_a(a^2-4) - \log_a(a+2) - \log_a(a-2) + \log_a(a^2)$ für $a < 2$

(c) $\log_a(x-1) + 3 \cdot \log_a(x+1) - \log_a(x^2-1)$

(d) $\log_{10}(x+1) + 2 \cdot \log_{10}(x-1) - \log_{10}(x^2-1)$

(e) $\log_3(x+5) - \log_3(5x+25) + 2 \cdot \log_3\left(\sqrt{5x}\right)$

(f) $\lg(x^3-4x) - \lg(x^2+2x) + \lg\frac{1}{x-2}$

(g) $\lg\frac{a^2+b^2}{a^3+ab^2} + \lg\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{a-b}$

§3. Berechnung von Logarithmen mit Log-Gesetzen

Beispiel

Gegeben sind $\log_a 2 \approx 0{,}63$, $\log_a 5 \approx 1{,}46$ und $\log_a 7 \approx 1{,}77$

(Die Basis ist nicht genannt, also für uns unbekannt, und die Logarithmen sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen, wir rechnen mit diesen Näherungswerten).

Berechne daraus $\log_a 10$, $\log_a 70$, $\log_a 2{,}5$, $\log_a 16$ und $\log_a \sqrt[3]{7}$

Lösung:

$$\log_a 10 = \log_a (2 \cdot 5) = \log_a 2 + \log_a 5 \approx 0{,}63 + 1{,}45 = 2{,}08$$

$$\log_a 70 = \log_a (10 \cdot 7) = \log_a 10 + \log_a 7 \approx 2{,}08 + 1{,}77 = 3{,}85$$

$$\log_a 2{,}5 = \log_a \frac{5}{2} = \log_a 5 - \log_a 2 \approx 1{,}46 - 0{,}63 = 0{,}83$$

$$\log_a 16 = \log_a 2^4 = 4 \cdot \log_a 2 \approx 4 \cdot 0{,}63 = 2{,}52$$

$$\log_a \sqrt[3]{7} = \log_a 7^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{3} \cdot \log_a 7 \approx \frac{1{,}77}{3} = 0{,}59$$

Aufgabe 301

Gegeben ist $\log_3 8 \approx 1{,}89$, $\log_3 10 = 2{,}10$
Berechne daraus:
$\log_3 80$, $\log_3 64$, $\log_3 0{,}1$, $\log_3 0{,}125$, $\log_3 2$, $\log_3 5$, $\log_3 \sqrt[3]{40}$, $\log_3 24$.

Aufgabe 302

Gegeben ist $\log_5 12 \approx 1{,}544$, $\log_5 3 \approx 0{,}683$
Berechne daraus:
$\log_5 4$, $\log_5 2$, $\log_5 100$, $\log_5 0{,}4$, $\log_5 360$, $\log_5 \frac{9}{5}$, $\log_5 \frac{25}{144}$.

Aufgabe 303

Gegeben ist $\log_e 9 \approx 2{,}197$ und $\log_e 0{,}9 = -0{,}105$.
Berechne daraus:
$\log_e 10$, $\log_e 27$, $\log_e 30$, $\log_e \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\log_e \sqrt[4]{27}$

Aufgabe 304

Gegeben sind $\mathbf{log_9} 8 = 0{,}9464$ und $\mathbf{log_9} 5 = 0{,}7325$.

Berechne daraus der Reihe nach $\mathbf{log_9} 2$; $\mathbf{log_9} 10$; $\mathbf{log_9} 16$; $\mathbf{log_9} 0{,}8$; $\mathbf{log_9} 9$;...$\mathbf{log_9} 1000$; $\mathbf{log_9} 0{,}625$; $\mathbf{log_9} 12{,}5$; $\mathbf{log_9} \sqrt{8}$; $\mathbf{log_9} \frac{1}{8}$; $\mathbf{log_9} \sqrt[3]{5}$; $\mathbf{log_9} 2\sqrt{5}$

Aufgabe 305

Gegeben sind $\mathbf{log_2} 15 = 3{,}9069$ und $\mathbf{log_2} 3 = 1{,}5850$.
Berechne daraus die Zweierlogarithmen von
5; 135; 225; 30; 6; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{9}$; $\frac{9}{5}$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 306

Gegeben sind $\log_3 5 = 1{,}4650$ und $\log_3 8 = 1{,}8928$

Berechne **daraus** mit ausführlicher Zwischenrechnung auf 4 Dezimalen

(a) $\log_3 2$ (b) $\log_3 200$ (c) $\log_3 15$ (d) $\log_3 \frac{4}{9}$

(e) $\log_3 4$ (f) $\log_3 24$ (g) $\log_3 \frac{25}{3}$

Aufgabe 307

Gegeben sind diese Logarithmen: $\log_{12} 3 \approx 0{,}4421$ und $\log_{12} 5 \approx 0{,}5477$
Berechne daraus ohne Taschenrechner (also begründet durch Logarithmusregeln) die folgenden Zahlen:

a) $\log_{12} 15$ b) $\log_{12} 0{,}6$ c) $\log_{12} \sqrt[4]{27}$

d) $\log_{12} 12$ e) $\log_{12} 4$ f) $\log_{12} \frac{1}{60}$

Aufgabe 308

Gegeben sind diese Logarithmen: $\log_5 6 = 1{,}113$ und $\log_5 3 = 0{,}683$

Berechne ohne Taschenrechner daraus:

a) $\log_5 2$ b) $\log_5 100$ c) $\log_5 \sqrt[4]{27}$ d) $\log_5 \sqrt{\frac{3}{5}}$

§4. Aufgehende Log-Gleichungen

Musteraufgaben:

(a) **Typ 1: Gesucht ist der Logarithmus**

$\log_3 81 = x \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 81 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4: \quad \mathbf{L} = \{4\}$

Dies sind gewöhnliche Berechnungen von Logarithmen wie in § 1 geschehen.
Dazu gibt es hier nur wenige Aufgaben !
Kompliziertere Aufgaben löst man mit Potenzketten, siehe § 1 .

(b) **Typ 2: Gesucht ist die Basis**

$\log_x 25 = 2$ wird umgewandelt in $x^2 = 25$

Diese hat dann die Lösungen $x_{1,2} = \pm 5$. Da aber negative Basis keine Verwendung finden, lautet die Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \{5\}$.

(c) **Typ 3: Gesucht ist das Argument**

$\log_4 x = 3$ wird umgewandelt in $x = 4^3 = 64$

Also lautet die Lösungsmenge $\mathbf{L} = \{64\}$

(d) **Typ 4: x in Argument und Basis**

$\log_x(32 - 4x) = 2$ wird umgewandelt in $x^2 = 32 - 4x$.

Diese Gleichung wird geordnet: $x^2 + 4x - 32 = 0$

Die Lösungsformel

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{falls } a \neq 0)}$$

liefert dann $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{2} = \dfrac{-4 \pm 12}{2} = \begin{cases} 4 \\ -8 \end{cases}$

Da eine Basis nicht negativ sein darf folgt: $\mathbf{L} = \{4\}$

(e) **Typ 4: Mit Summe aus 2 Logarithmen**

$\log_2(x+3) + \log_2(x+6) = 2$ 1. Log-Regel anwenden:

$\log_2[(x+3)(x+6)] = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(x^2 + 9x + 18) = 2$

$x^2 + 9x + 18 = 2^2 [= 4] \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 9x + 14 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{-9 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ -7 \end{cases}$$

Beide Zahlen scheiden aus, weil sie negative Argumente erzeugen.
Also ist die Lösungsmenge leer: $\mathbf{L} = \{\ \}$

411 Aufgaben zu Typ 1:

(a) $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{1}{25} = x$ (b) $\log_{\sqrt[3]{25}} \frac{1}{\sqrt{5}} = x$

(c) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$ (d) $\log_{a^2} \sqrt[3]{a} = x$

421 Aufgaben zu Typ 2: Gesucht ist die Basis

(a) $\log_x 512 = 9$ (b) $\log_x 16 = 4$

(c) $\log_x 27 = 3$; (d) $\log_x 2 = 4$

(e) $\log_x 64 = 4$ (f) $\log_x 9 = 4$

(g) $\log_x 8 = 6$ (h) $\log_x \frac{1}{25} = 4$

431 Aufgaben zu Typ 3: Gesucht ist das Argument

(a)	$\log_{25} x = -\frac{1}{2}$	$\log_{\sqrt{3}} x = 8$	$\log_{\sqrt{5}} x = 6$	$\log_9 x = \frac{1}{4}$
(b)	$\log_2 x = -5$	$\log_{\sqrt{3}} x = -3$	$\log_{\frac{1}{3}} x = -2$	$\log_{\sqrt[3]{4}} x = 2$
(c)	$\log_{64} x = \frac{2}{3}$	$\log_{25} x = -\frac{1}{4}$	$\log_{125} x = \frac{4}{3}$	$\log_{32} x = 0{,}2$
(d)	$\log_{27} x = -\frac{1}{3}$	$\log_{\sqrt{2}} x = 10$	$\log_{25} x = -\frac{1}{4}$	$\log_{16} x = \frac{3}{4}$
(e)	$\log_5 x = 3$	$\log_{25} x = -\frac{1}{2}$	$\log_{81} x = -\frac{3}{2}$	$\log_{\frac{2}{3}} x = 8$
(f)	$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8 = x$	$\log_{\sqrt{2}} x = 10$	$\log_{\sqrt{3}} x = -2$	$\log_{\sqrt[3]{5}} x = 6$

441 Aufgaben zu Typ 4: Argument als Term

(a) $\log_3\left(2x-\frac{5}{3}\right)=-1$

(b) $\log_3(x+80)=4$

(c) $\log_5(x+1)=3$

(d) $\log_4(5x-1)=-1$

(e) $\log_2\left(x^2-1\right)=4$

(f) $\log_5 x^2=3$

(g) $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-1\right)=4$

(h) $\log_{\sqrt[3]{2}}\left(x^2+1\right)=6$

442 Aufgaben zu Typ 4: x in Argument und Basis

(a) $\log_x(6-x)=2$

(b) $\log_x\left(x-\frac{8}{3}\right)=-1$

(c) $\log_x(x+6)=2$

(d) $\log_x(10-3x)=2$

(e) $\log_x\left(x-\frac{15}{4}\right)=-1$

(f) $\log_x(x+2)=2$

(g) $\log_x(x+6)=2$

(h) $\log_x(15-2x)=2$

(i) $\log_x\left(32-4x^2\right)=4$

443 Aufgaben zu Typ 4: Mit Summe von Logarithmen

(a) $\log_2(x-3)+\log_2(x+4)=3$

(b) $\log_2(x-5)+\log_2(x+3)=3$

(c) $\log_9(x-4)+\log_9(x-2)=\frac{1}{2}$

(d) $\log_7(x-2)+\log_7(x+4)=1$

(e) $\lg x+\lg(x+4)=\lg 21$

(f) $\log_4(x+3)+\log_4(x+2)=\frac{1}{2}$

(g) $\log_x 2+\log_x(x+12)=2$

(h) $\log_6(x+2)+\log_6(x-3)=1$

(i) $\log_6(x+4)+\log_6(x-4)=1+\log_6 x$

444 Aufgaben zu Typ 4: Mit Differenz von Logarithmen

a) $\log_4(x+2)-\log_4(x-1)=\frac{1}{2}$

(b) $\log_5(x+2)-\log_5(x-2)=1$

(c) $\log_3\left(x^2-9\right)-\log_3(x+3)=3$

(d) $\log_2(x-4)-\log_2\left(x^2-16\right)=-4$

§ 5 Ausflug: Einfache Exponentialgleichungen

Beispiel 1

$4^x = \frac{1}{2}$ hat ein wesentliches Merkmal: Die 4 und $\frac{1}{2}$ kann man auf die gemeinsame Basis 2 umrechnen: $4 = 2^2$ und $\frac{1}{2} = 2^{-1}$. Daher kann man die Gleichung so umformen:

$(2^2)^x = 2^{-1}$ bzw.

$2^{2x} = 2^{-1}$. Da zwei Potenzen mit gleicher Basis nur dann dasselbe Ergebnis liefern, wenn auch die Exponenten gleich sind, vergleicht man diese und erhält:

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$ Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Beispiel 2

$4^x = 3$ hat diese Eigenschaft nicht mehr. Daher verwendet man eine Logarithmusmethode: Man logarithmiert die Gleichung:

$\lg 4^x = \lg 3$ Wenn man lg schreibt, dann verwendet man den sogenannten Zehnerlogarithmus, also den Logarithmus zur Basis 10, wofür man umständlicher auch $\log_{10}$ schreiben kann. Dieser lg hat den Vorteil, dass er in Taschenrechner implementiert ist und man daher mit ihm rechnen kann. Auf Taschenrechnern heißt er meistens „log" .

Nun wendet man das 3. Logarithmus-Gesetz an:
$\lg 4^x = x \cdot \lg 4$ **. Damit geling es, die Unbekannte aus dem Exponenten herunter zu holen!**

$x \cdot \lg 4 = \lg 3$

$$x = \frac{\lg 3}{\lg 4} \approx 0{,}79$$

$\mathbf{L} = \{0{,}79\}$.

Aufgabe 501

Berechne die Lösungsmenge zu

(a) $3^x = 27$ (b) $2^x = \sqrt{2}$ (c) $4^x = 2$

(d) $9^x = \frac{1}{3}$ (e) $125^x = \frac{1}{25}$ (f) $4^{-x} = 32$

Aufgabe 502

Berechne die Lösungsmenge zu

(a) $3^x = 2$ (b) $5^x = 8$ (c) $3^{-x} = 16$

(d) $2^{3x} = 6$ (e) $3^{2x} = 7$ (f) $2^{x+2} = 10$

Aufgabe 503

(a) $2^x = 5$ (b) $3^x = 24$ (c) $4^x = \frac{1}{3}$

(d) $2^{x+2} = 5$ (e) $3^{4x} = 5$

§ 6 Logarithmen zu neuen Basen

Beispiel 1

Berechne $\log_7 5$.

Man bildet daraus die Gleichung $x = \log_7 5$ und wandelt sie in eine Exponentialgleichung um: $7^x = 5$. Beide Gleichungen stellen dasselbe in anderer Form dar !
Nun löst man diese Gleichung durch Logarithmieren wie in § 5 gezeigt:

$7^x = 5 \quad | \lg$

$$\lg 7^x = \lg 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \lg 7 = \lg 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 5}{\lg 7} \approx 0{,}8271$$

Ergebnis: $\log_7 5 \approx 0{,}8271$

Allgemeiner Rechenweg:

$$\boxed{x = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \lg a = \lg b \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg b}{\lg a}}$$

Also gilt:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}}$$

Man löst nun solche Aufgaben entweder ausführlich wie oben gezeigt, oder kurz wie in Beispiel 2, das hängt von der Aufgabenstellung ab.

Beispiel 2

$$\log_7 12 = \frac{\lg 12}{\lg 7} \approx 1{,}2770$$

Aufgabe 601

Berechne:

$\log_7 12$; $\log_5 7$; $\log_{12} 7$; $\log_{28} 56$; $\log_{27} 3$; $\log_3 (-8)$; $\log_5 \sqrt{6}$

Aufgabe 602

Berechne mit dem Taschenrechner auf 3 Dezimalen genau.
Gib zur Begründung eine Folge von Gleichungen an,

(a) $\log_{12} 17$ (b) $\log_{17} 12$ (c) $\log_7 21$

(d) $\log_8 15$ (e) $\log_7 13$

Lösungsteil

§ 7 Lösungen zu §1

Aufgabe 101: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Natürliche Zahl

(a)	$\log_2 64$	(b)	$\log_3 81$	(c)	$\log_9 3$	(d)	$\log_7 1$
(e)	$\log_{16} 2$	(f)	$\log_{32} 2$	(g)	$\log_5(-5)$	(h)	$\log_8 4$
(i)	$\log_{16} 8$	(j)	$\log_{27} 9$	(k)	$\log_{27} 243$	(l)	$\log_9 27$

Lösungen

(a) $\log_2 \boxed{64} = \log_2 \boxed{2^6} = 6$

<u>Erklärung zur Lösung</u> von a)
Ich stelle 64 als Potenz mit der Basis 2 dar, wie es die Aufgabe vorgibt.
Der Logarithmus ist dann die gesuchte Hochzahl (der Exponent) !

(b) $\log_3 \boxed{81} = \log_3 \boxed{3^4} = 4$

(c) $\log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ denn $3 = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$!

(d) $\log_7 1 = 0$, denn $7^0 = 1$;

(e) $\log_{16} 2 = \log_{16} 16^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$, denn $2 = \sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}}$

(f) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$, denn $2 = \sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}}$

(g) $\log_5(-5)$ existiert nicht, denn eine Potenz von 5 ist stets positiv !

Merke: Das Argument einer Logarithmusfunktion muß stets positiv sein, denn das Ergebnis einer Potenzierung einer positiven Basis ist stets positiv.

(h) $\log_8 4 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$, <u>Zur Begründung verwende ich eine Potenzkette</u>:

Das Ziel ist, durch Potenzierung von der Basiszahl 8 auf das Ergebnis 4 zu kommen. Dazu muss ich herausfinden, dass 8 und 4 die gemeinsame Basis 2 besitzen. Also potenziere ich zuerst 8 mit $\frac{1}{3}$ (ich ziehe also die 3. Wurzel):

$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$, dann quadriert man noch und erhält 4. Folgende Schreibweise ist ideal:

$$8 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2 \xrightarrow[2]{} 4$$

Also ist $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}} = 4$. Daher ist $\log_8 4 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$!

(i) $\log_{16} 8$ Gemeinsame Basis von 16 und 8 ist 2. Potenzkette:

$$16 \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} 2 \xrightarrow[3]{} 8 \quad \text{also ist } \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 16^{\frac{3}{4}} = 8$$

Es folgt: $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

(j) $\log_{27} 9$ Gemeinsame Basis von 27 und 9 ist 3. Potenzkette:

$27 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 3 \xrightarrow[2]{} 9$ also ist $\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 27^{\frac{2}{3}} = 9$

Es folgt: $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

(k) $\log_{27} 243$ Gemeinsame Basis von 27 und 243 ist 3. Potenzkette:

$27 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 3 \xrightarrow[5]{} 243$ also ist $\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 27^{\frac{5}{3}} = 243$

Es folgt: $\log_{27} 243 = \frac{5}{3}$

(l) $\log_9 27$ Gemeinsame Basis von 9 und 27 ist 3. Potenzkette:

$9 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 3 \xrightarrow[3]{} 27$ also ist $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 9^{\frac{3}{2}} = 27$

Es folgt: $\log_9 27 = \frac{3}{2}$

Aufgabe 102: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Bruchzahl

(a)	$\log_{27} \frac{1}{27}$	(b)	$\log_2 \frac{1}{2}$	(c)	$\log_2 \frac{1}{8}$	(d)	$\log_{13} \frac{1}{169}$
(e)	$\log_4 \frac{1}{64}$	(f)	$\log_2 \frac{1}{32}$	(g)	$\log_3 \frac{1}{81}$	(h)	$\log_{32} \frac{1}{2}$
(i)	$\log_{16} \frac{1}{8}$	(i)	$\log_{27} \frac{1}{3}$	(k)	$\log_{64} \frac{1}{8}$	(l)	$\log_{32} \frac{1}{4}$

Lösungen

(a) $\log_{27} \frac{1}{27} = -1$ denn $27^{-1} = \frac{1}{27}$

(b) $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

(c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, denn $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(d) $\log_{13} \frac{1}{169} = -2$ denn $13^2 = 169$, also ist $13^{-2} = \frac{1}{169}$

(e) $\log_4 \frac{1}{64} = \log_4 4^{-4} = -3$ denn $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

(f) $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5$ denn $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

(g) $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$ denn $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

(h) $\log_{32} \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$ Hier verwende ich die Methode „Potenzkette“:

$$32 \xrightarrow{\frac{1}{5}} 2 \xrightarrow{-1} \tfrac{1}{2}$$

(i) $\log_{16} \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$ denn die Potenzkette lautet

$$16 \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} 2 \xrightarrow[3]{} 8 \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{8}$$

also ist $\left(\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3\right)^{-1} = 16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$

(j) $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ denn die Potenzkette lautet

$$27 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 3 \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{3}$$

also ist $\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

(k) $\log_{64} \frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$ Gemeinsame Basis von 64 und 8 ist 8 !!

$$64 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 8 \xrightarrow[.1]{} \tfrac{1}{8}$$

Also ist $\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 64^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

(l) $\log_{32} \frac{1}{4} = -\frac{2}{5}$ Gemeinsame Basis von 32 und 4 ist 2:

$$32 \xrightarrow[\frac{1}{5}]{} 2 \xrightarrow[2]{} 4 \xrightarrow[-1]{} \tfrac{1}{4}$$

Also ist $\left(\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^2\right)^{-1} = 32^{-\frac{2}{5}}$

Aufgabe 103: Basis: Bruchzahl ; Argument: Natürliche Zahl oder Bruchzahl

(a) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81}$ (b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ (c) $\log_{\frac{1}{4}} 16$ (d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$

(e) $\log_{\frac{1}{4}} 2$ (f) $\log_{\frac{1}{9}} 27$ (g) $\log_{\frac{1}{25}} 125$ (h) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{8}$

(i) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{27}$ (j) $\log_{\frac{1}{25}} \frac{1}{125}$ (k) $\log_{\frac{8}{27}} \frac{3}{2}$ (l) $\log_{\frac{1}{16}} 4$

Lösung

(a) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81} = 4$ denn $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

(b) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ denn $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

(c) $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$ denn $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$

(d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = -2$ denn $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

(e) $\log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{1}{2}$ denn $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

(f) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{27} = \frac{3}{2}$ denn $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ und $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$: $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}$

(g) $\log_{\frac{1}{25}} \frac{1}{125} = \frac{3}{2}$ denn $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$ und $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$: $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{125}$

(h) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ denn $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$ und $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$: $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$

bzw.: $\frac{1}{16} \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[3]{} \frac{1}{8}$

(i) $\log_{\frac{1}{9}} 27 = -\frac{3}{2}$ 9 und 27 haben die gemeinsame Basis 3:

$\frac{1}{9} \xrightarrow{-1} 9 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 3 \xrightarrow{3} 27$ also gilt

$\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} = 27$

(j) $\log_{\frac{1}{25}} 125 = -\frac{3}{2}$ denn gemeinsame Basis von 25 und 125 ist 5:

$\frac{1}{25} \xrightarrow[-1]{} 25 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 5 \xrightarrow[3]{} 125$

also ist $\left(\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$

(k) $\log_{\frac{8}{27}} \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$ denn $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ also ist $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$ und $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

(l) $\log_{\frac{1}{16}} 4 = -\frac{1}{2}$ denn $16 \xrightarrow[-1]{} 16 \xrightarrow[\sqrt{\ }]{} 4$

also ist $\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 4$

Aufgabe 104: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Quadratwurzeln

(a) $\log_2 \sqrt{2}$ (b) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\log_8 2\sqrt{2}$ (d) $\log_3 \sqrt{3}$

(e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ (f) $\log_3 \sqrt{27}$ (g) $\log_5 \frac{1}{25\sqrt{5}}$ (h) $\log_4 \sqrt{2}$

(i) $\log_8 \sqrt{2}$ (j) $\log_9 \sqrt{3}$ (k) $\log_8 \sqrt{\frac{1}{2}}$ (l) $\log_{16} \frac{1}{\sqrt{8}}$

(m) $\log_9 \frac{1}{\sqrt{3}}$ (n) $\log_{16} \frac{1}{\sqrt{32}}$ (o) $\log_{25} \frac{1}{5\sqrt{5}}$ (p) $\log_{64} \frac{8}{\sqrt{2}}$

Lösung

(a) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ denn $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

(b) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$ denn $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}}$

(c) $\log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

(d) $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

(f) $\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$ denn $3^3 = 27$ und $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

(g) $\log_5 \frac{1}{25\sqrt{5}} = \log_5 \frac{1}{5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}} = \log_5 \frac{1}{5^{\frac{5}{2}}} = \log_5 5^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}$

(h) $\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$ denn die Potenzkette über die gemeinsame Basis 2 ist

$$4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{2} \quad \text{also} \quad \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$$

(i) $\log_8 \sqrt{2} = \frac{1}{6}$ denn die Potenzkette über die gemeinsame Basis 2 ist

$$8 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{2} \quad \text{also} \quad \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2}$$

(j) $\log_9 \sqrt{3} = \frac{1}{4}$ denn die Potenzkette über die gemeinsame Basis 3 ist

$$9 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 3 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{3} \quad \text{also} \quad \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$$

(k) $\log_8 \sqrt{\frac{1}{2}}$ denn die Potenzkette über die gemeinsame Basis 2 ist

$$8 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2 \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{also} \quad \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 8^{-\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

(l) $\log_{16}\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{3}{8}$ denn die Potenzkette über die gemeinsame Basis 2 ist

$$16 \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} 2 \xrightarrow[3]{} 8 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{8} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{\sqrt{8}} \quad \text{also ist}$$

$$\left(\left(\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 16^{-\frac{3}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$ Wissen: $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$!!

(m) $\log_{9}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{4}$ denn die Potenzkette über die gemeinsame Basis 3 ist

$$9 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 3 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{3} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{also} \quad \left(\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 9^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(n) $\log_{16}\frac{1}{\sqrt{32}} = -\frac{5}{8}$ denn die Potenzkette über die gemeinsame Basis 2 ist

$$16 \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} 2 \xrightarrow[5]{} 32 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{32} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{\sqrt{32}} \quad \text{also ist}$$

$$\left(\left(\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 16^{-\frac{5}{8}} = \frac{1}{\sqrt{32}}.$$ **Wissen:** $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$!!

(o) $\log_{25}\frac{1}{5\sqrt{5}} = -\frac{3}{4}$ **Wissen**: $5\sqrt{5} = 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$. Potenzkette:

$$25 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 5 \xrightarrow[\frac{3}{2}]{} 5\sqrt{5} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

also ist $\left(\left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} = 25^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}$

(p) $\log_{64}\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{5}{12}$ denn: Umrechnung: $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{3-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$.

Andererseits ist $64 = 2^6$ also $\sqrt[6]{64} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$.

$$64 \xrightarrow[\frac{1}{6}]{} 2 \xrightarrow[\frac{5}{2}]{} \frac{8}{\sqrt{2}}$$

Daher ist $\left(64^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{5}{2}} = 64^{\frac{5}{12}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 105: Basis: Natürliche Zahl; Argument: Wurzeln

(a)	$\log_2 \sqrt[3]{2}$	(b)	$\log_2 \sqrt[5]{4}$	(c)	$\log_3 \sqrt[4]{27}$	(d)	$\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$
(e)	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$	(f)	$\log_4 \sqrt[3]{2}$	(g)	$\log_9 \sqrt[5]{27}$	(h)	$\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
(i)	$\log_8 \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	(j)	$\log_6 \sqrt[5]{36}$	(k)	$\log_{81} \frac{1}{\sqrt{27}}$	(l)	$\log_6 \sqrt[3]{9}$

Lösung

(a) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

(b) $\log_2 \sqrt[5]{4} = \log_2 2^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$

(c) $\log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 \left(3^3\right)^{\frac{1}{4}} = \log\left(3^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}$

(d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \log_3 3^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}$

(e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

(j) $\log_6 \sqrt[5]{36} = \log_6 \sqrt[5]{6^2} = \log_6 \left(6^2\right)^{\frac{1}{5}} = \log_6 6^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$

(f) $\log_4 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{6}$ Potenzkette: $4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

also ist $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{2}$

(g) $\log_9 \sqrt[5]{27} = \frac{3}{10}$ Potenzkette: $9 \xrightarrow[\sqrt{\ }\,\hat{=}\,\frac{1}{2}]{} 3 \xrightarrow[3]{} 27 \xrightarrow[\frac{1}{5}]{} 27^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{27}$

also ist $\left(\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3\right)^{\frac{1}{5}} = 9^{\frac{3}{10}} = \sqrt[5]{27}$

(h) $\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = -\frac{1}{6}$ Potenzkette: $9 \xrightarrow[\sqrt{\ }\,\hat{=}\,\frac{1}{2}]{} 3 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \sqrt[3]{3} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

also ist $\left(\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = 9^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

(i) $\log_8 \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{2}{9}$ Potenzkette:

$8 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2 \xrightarrow[2]{} 4 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \sqrt[3]{4} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

also ist $\left(\left(\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = 8^{-\frac{2}{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

(k) $\log_{81}\frac{1}{\sqrt{27}}=-\frac{3}{8}$ Potenzkette: (gemeinsame Basis von 81 und 27 ist 3):

$$81 \xrightarrow[\frac{1}{4}\hat{=}\sqrt[4]{\ }]{} 3 \xrightarrow[3]{} 27 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{27} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{\sqrt{27}}$$

also ist $\left(\left(\left(81^{\frac{1}{4}}\right)^{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}=81^{-\frac{3}{8}}=\frac{1}{\sqrt{27}}$

(l) $\log_6\sqrt[3]{9}$ ist auf diese Weise nicht ermittelbar, weil 9 eine Dreierpotenz ist, 6 aber nicht (wenn man rationale Exponenten fordert !). Es gibt also für rationale Exponenten keine gemeinsame Basis !

Aufgabe 106: Basis: Natürliche Zahl; Argument: ***Schwere Wurzeln***

(a) $\log_2 \sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{4}$ (b) $\log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}$ (c) $\log_5 \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}$

(d) $\log_2 \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ (e) $\log_3 \sqrt{3\cdot\sqrt{3}}$ (f) $\log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3}}$

(g) $\log_{32} \sqrt{\dfrac{8}{\sqrt{2}}}$ (h) $\log_8 \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (i) $\log_4 \sqrt{\sqrt[3]{8}}$

(j) $\log_3 \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}}$ (k) $\log_4 \sqrt[4]{8\cdot\sqrt{2}}$ (l) $\log_4 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{4}}$

(m) $\log_{32} \sqrt[3]{4\sqrt{8}}$ (n) $\log_{16} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}$ (o) $\log_{27} \dfrac{3}{\sqrt[3]{81}}$

Lösung

(a) $\log_2 \sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{4} = \frac{9}{10}$ denn $\sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{4} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{5}{10}+\frac{4}{10}} = 2^{\frac{9}{10}}$

(b) $\log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}} = -\dfrac{1}{6}$ denn $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{6}-\frac{4}{6}} = 3^{-\frac{1}{6}}$

(c) $\log_5 \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{6}$ denn $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}} = 5^{-\frac{1}{6}} \left(= \dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}\right)$

(d) $\log_2 \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ denn $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}}$

(e) $\log_3 \sqrt{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$ denn $\sqrt{3\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{3\cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3^{\frac{3}{2}}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{4}}$

(f) $\log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3}} = -\dfrac{3}{4}$ denn $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3\cdot 3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{3}{4}}$

(g) $\log_{32} \sqrt{\dfrac{8}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{4}$ denn $\sqrt{\dfrac{8}{\sqrt{2}}} = \left(\dfrac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{4}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{4}} = 32^{\frac{1}{4}}$

(h) $\log_8 \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\dfrac{2}{9}$, denn $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{-\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{2}{9}}$

(i) $\log_4 \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{4}$ denn $\sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ und dann diese Potenzkette:

$4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{2}$, also ist $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$

(j) $\log_3 \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}} = -\frac{1}{3}$ denn $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}} = \sqrt{\frac{1}{(3^2)^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{(3^2)^{-\frac{1}{3}}} = \left((3^2)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{3}}$

Anderer Weg („mit Köpfchen“):
Man darf zwei geschachtelte Wurzeln vertauschen:

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{9}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{9}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}$$

(k) $\log_4 \sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{2}} = \frac{7}{16}$ denn $\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{2}} = \left(2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{3+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{8}}$

Nun ersetzen wir $2 = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$ und erhalten

$$= \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{7}{8}} = 4^{\frac{7}{16}}$$

(l) $\log_4 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{4}} = \frac{5}{24}$ denn $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[4]{2^{1+\frac{2}{3}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{5}{3}}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{12}}$

Jetzt ersetzt man 2 durch $4^{\frac{1}{2}}$, denn 4 soll die Basis sein.

ergibt $= \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{12}} = 4^{\frac{5}{24}}$

Oder diese Potenzkette verwenden:

$$4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[\frac{5}{12}]{} 2^{\frac{5}{12}} \quad \text{also ist} \quad \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{12}} = 4^{\frac{5}{24}}$$

(m) $\log_{32} \sqrt[3]{4\sqrt{8}} = \frac{7}{30}$ denn $\sqrt[3]{4\sqrt{8}} = \sqrt[3]{2^2 \cdot \sqrt{2^3}} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{7}{2}}} = \left(2^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$

Nun weiß man $2^5 = 32$, also ist $2 = \sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}}$

Dies setzt man ein: $= \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{7}{6}} = 32^{\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{6}} = 32^{\frac{7}{30}}$

Oder man bildet diese Potenzkette:

$$32 \xrightarrow[\frac{1}{5}]{} 2 \xrightarrow[\frac{7}{6}]{} 2^{\frac{7}{6}}, \quad \text{also folgt} \quad \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{7}{6}} = 32^{\frac{7}{30}}$$

(n) $\log_{16} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{1}{16}$ denn $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{1}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{4}} = 16^{-\frac{1}{16}}$

(o) $\log_{27} \frac{3}{\sqrt[3]{81}} = -\frac{1}{9}$ denn $\frac{3}{\sqrt[3]{81}} = \frac{3}{3^{\frac{4}{3}}} = 3^{1-\frac{4}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{3}} = 27^{-\frac{1}{9}}$

Aufgabe 107: Basis: Bruchzahl; Argument: Wurzeln

(a) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{2}$ (b) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{2}$ (c) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{3}$ (d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$

(e) $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3}$ (f) $\log_{\frac{25}{16}} \frac{2}{\sqrt{5}}$ (g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{128}$ (h) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$

(i) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{16}$ (j) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$ (k) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{32}$ (l) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{\sqrt{8}}$

Lösung

(a) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt{2}$

Potenzkette: $\frac{1}{8} \xrightarrow[-1]{} 8 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{2}$

also ist $\left(\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{6}} = \sqrt{2}$

(b) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{2} = -\frac{1}{6}$

Potenzkette: Potenzkette: $\frac{1}{4} \xrightarrow[-1]{} 4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \sqrt[3]{2}$

Also ist $\left(\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{2}$

(c) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{3} = -\frac{1}{4}$

Potenzkette: $\frac{1}{9} \xrightarrow[-1]{} 9 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 3 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{3}$

also ist $\left(\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{4}}$

(d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = -\frac{3}{2}$

Potenzkette: $\frac{1}{3} \xrightarrow[-1]{} 3 \xrightarrow[3]{} 27 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{27}$

also ist $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$

(e) $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3} = -\frac{1}{6}$

denn $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left(3^{-3}\right)^{-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

oder mit einer Potenzkette:

$\frac{1}{27} \xrightarrow[-1]{} 27 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 3 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{3}$

also ist $\left(\left(\left(\frac{1}{27}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{6}}$

(f) $\log_{\frac{25}{16}} \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{4}$

Potenzkette: $\frac{25}{16} \xrightarrow[-1]{} \frac{16}{25} \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \frac{4}{5} \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \frac{2}{\sqrt{5}}$

also ist $\left(\left(\left(\frac{25}{26}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{25}{26}\right)^{-\frac{1}{4}}$

(g) $\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{128} = -\frac{7}{4}$

Potenzkette:

$\frac{1}{4} \xrightarrow[-1]{} 4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[7]{} 128 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{128}$

Also ist $\left(\left(\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{7}{4}} = \sqrt{128}$

(h) $\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{2} = -\frac{1}{4}$

Potenzkette: $\frac{1}{4} \xrightarrow[-1]{} 4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{2}$

Also ist $\left(\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$

(i) $\log_{\frac{1}{8}}\sqrt[3]{16} = -\frac{4}{9}$

Potenzkette:

$\frac{1}{8} \xrightarrow[-1]{} 8 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2 \xrightarrow[4]{} 16 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \sqrt[3]{16}$

also ist $\left(\left(\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{9}}$

(j) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{8} = -\frac{3}{2}$

Potenzkette: $\frac{1}{2} \xrightarrow[-1]{} 2 \xrightarrow[3]{} 8 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{8}$

also ist $\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

(k) $\log_{\frac{1}{16}}\sqrt[3]{32} = -\frac{5}{12}$

Potenzkette: $\frac{1}{16} \xrightarrow[-1]{} 16 \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} 2 \xrightarrow[5]{} 32 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \sqrt[3]{32}$

Also ist $\left(\left(\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}\right)^{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{5}{12}} = \sqrt[3]{32}$

(l) $\log_{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}$

Nebenrechnung: $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$

Potenzkette: Potenzkette: $\frac{1}{4} \xrightarrow[-1]{} 4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{2}$

Also ist $\left(\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$

Aufgabe 108: Basis: Wurzel; Argument: Natürliche Zahl oder Bruchzahl

(a) $\log_{\sqrt{5}} 5$ (b) $\log_{\sqrt[3]{2}} 2$ (c) $\log_{\sqrt{5}} 125$ (d) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$

(e) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$ (f) $\log_{\sqrt{3}} 27$ (g) $\log_{\sqrt[4]{2}} 8$ (h) $\log_{\sqrt[3]{3}} \frac{1}{9}$

(i) $\log_{\sqrt[3]{4}} 2$ (j) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ (k) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{1}{4}$ (l) $\log_{\frac{1}{\sqrt[5]{16}}} \frac{1}{8}$

Lösung

(a) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2$ denn $\sqrt{5}^2 = 5$

(b) $\log_{\sqrt[3]{2}} 2 = 3$ denn $\sqrt[3]{2}^3 = 2$

(c) $\log_{\sqrt{5}} 125 = 6$ Potenzkette: $\sqrt{5} \xrightarrow[2]{} 5 \xrightarrow[3]{} 125$

also ist $\left(\sqrt{5}^2\right)^3 = \sqrt{5}^6 = 125$

(d) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = -2$ Potenzkette: $\sqrt{5} \xrightarrow[2]{} 5 \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{5}$

(e) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$ = -4 denn $\sqrt{3} \xrightarrow[2]{} 3 \xrightarrow[2]{} 9 \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{9}$ d.h. $\left(\sqrt{3}\right)^{-4} = \frac{1}{9}$

(f) $\log_{\sqrt{3}} 27 = 6$ denn $\sqrt{3} \xrightarrow[2]{} 3 \xrightarrow[3]{} 27$ also ist $\left(\sqrt{3}\right)^6 = 27$

(g) $\log_{\sqrt[4]{2}} 8 = 12$ denn $\sqrt[4]{2} \xrightarrow[4]{} 2 \xrightarrow[3]{} 8$ also ist $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{12} = 8$

(h) $\log_{\sqrt[3]{3}} \frac{1}{9} = -6$ denn $\sqrt[3]{3} \xrightarrow[3]{} 3 \xrightarrow[2]{} 9 \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{9}$ also ist $\sqrt[3]{3}^{-6} = \frac{1}{9}$

(i) $\log_{\sqrt[3]{4}} 2 = \frac{3}{2}$ denn $\sqrt[3]{4} \xrightarrow[3]{} 4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2$ also ist $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}} = 2$

(j) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4 = -4$ denn $\frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[-1]{} \sqrt{2} \xrightarrow[2]{} 2 \xrightarrow[2]{} 4$ also $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4} = 4$

(k) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{1}{4} = 6$ denn $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \xrightarrow[3]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[2]{} \frac{1}{4}$ also ist $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6 = \frac{1}{4}$

(l) $\log_{\frac{1}{\sqrt[5]{16}}} \frac{1}{8} = -\frac{15}{4}$ denn $\sqrt[5]{16} \xrightarrow[5]{} 16 \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} 2 \xrightarrow[3]{} 8 \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{8}$

also ist $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\right)^{-\frac{15}{4}} = \frac{1}{8}$

Aufgabe 109: Basis: Wurzel; Argument: Wurzel

(a) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8}$ (b) $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{27}}$ (c) $\log_{\sqrt[4]{5}}\sqrt{5}$ (d) $\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}$

(e) $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{1}{\sqrt{125}}$ (f) $\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{25}$ (g) $\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ (h) $\log_{\sqrt{27}}\sqrt[3]{9}$

(i) $\log_{\sqrt{9}}\sqrt[3]{9}$ (j) $\log_{\sqrt[4]{2}}\sqrt[3]{4}$ (k) $\log_{\sqrt[3]{4}}\sqrt[5]{2}$ (l) $\log_{\sqrt[4]{27}}\sqrt[5]{9}$

Lösung

(a) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8}=3$ denn $\sqrt{2}^3=\sqrt{8}$

(b) $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{27}}=-3$ denn $\sqrt{3}^3=\sqrt{27}$

(c) $\log_{\sqrt[4]{5}}\sqrt{5}=2$ denn $\sqrt[4]{5}\xrightarrow[4]{}5\xrightarrow[\frac{1}{2}]{}\sqrt{5}$!!!

(d) $\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}=\frac{3}{2}$ denn $\sqrt[3]{2}\xrightarrow[3]{}2\xrightarrow[\frac{1}{2}]{}\sqrt{2}$ also ist $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2}$

(e) $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{1}{\sqrt{125}}=-\frac{9}{2}$ denn $\sqrt[3]{5}\xrightarrow[3]{}5\xrightarrow[3]{}125\xrightarrow[\frac{1}{2}]{}\sqrt{125}\xrightarrow[-1]{}\frac{1}{\sqrt{125}}$

also ist $\left(\left(\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}=\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{9}{2}}$

(f) $\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{25}=\frac{4}{3}$ denn $\sqrt{5}\xrightarrow[2]{}5\xrightarrow[2]{}25\xrightarrow[\frac{1}{3}]{}\sqrt[3]{25}$

(g) $\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt[3]{25}}=-\frac{4}{3}$ denn $\sqrt{5}\xrightarrow[2]{}5\xrightarrow[2]{}25\xrightarrow[\frac{1}{3}]{}\sqrt[3]{25}\xrightarrow[-1]{}\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

(h) $\log_{\sqrt{27}}\sqrt[3]{9}=\frac{4}{9}$ denn $\sqrt{27}\xrightarrow[2]{}27\xrightarrow[\frac{1}{3}]{}3\xrightarrow[2]{}9\xrightarrow[\frac{1}{3}]{}\sqrt[3]{9}$

(i) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[3]{9}=\frac{4}{3}$ denn $\sqrt{3}\xrightarrow[2]{}3\xrightarrow[2]{}9\xrightarrow[\frac{1}{3}]{}\sqrt[3]{9}$

also ist $\left(\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{9}$

(j) $\log_{\sqrt[4]{2}}\sqrt[3]{4}=\frac{8}{3}$, denn $\sqrt[4]{2}\xrightarrow[4]{}2\xrightarrow[2]{}4\xrightarrow[\frac{1}{3}]{}\sqrt[3]{4}$ d.h. $\sqrt[4]{2}\xrightarrow[\frac{8}{3}]{}\sqrt[3]{4}$

(k) $\log_{\sqrt[3]{4}}\sqrt[5]{2}=\frac{3}{10}$, denn $\sqrt[3]{4}\xrightarrow[3]{}4\xrightarrow[\frac{1}{2}]{}2\xrightarrow[\frac{1}{5}]{}\sqrt[5]{2}$

(l) $\log_{\sqrt[4]{27}}\sqrt[5]{9}=\frac{8}{15}$, denn $\sqrt[4]{27}\xrightarrow[4]{}27\xrightarrow[\frac{1}{3}]{}3\xrightarrow[2]{}9\xrightarrow[\frac{1}{5}]{}\sqrt[5]{9}$

Aufgabe 110: Basis: Wurzel; Argument: Wurzel – Schwer !

(a) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{8}$ (b) $\log_{\frac{1}{\sqrt{8}}} \sqrt{2}$ (c) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \sqrt[4]{2}$ (d) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

(e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ (f) $\log_{\sqrt[4]{27}} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{81}}$ (g) $\log_{\sqrt{27}} \frac{\sqrt{3}}{3}$ (h) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2}}}$

Lösung

(a) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{8} = -3$ denn $\frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[-1]{} \sqrt{2} \xrightarrow[2]{} 2 \xrightarrow[3]{} 8 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{8}$

oder kürzer: $\frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[-1]{} \sqrt{2} \xrightarrow[3]{} \sqrt{8}$

(b) $\log_{\frac{1}{\sqrt{8}}} \sqrt{2} = -\frac{1}{6}$ denn $\frac{1}{\sqrt{8}} \xrightarrow[-1]{} \sqrt{8} \xrightarrow[2]{} 8 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} \sqrt[4]{2}$

(c) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \sqrt[4]{2} = -\frac{3}{4}$ denn $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \xrightarrow[3]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[-1]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} \sqrt[4]{2}$

(d) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$ denn $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \xrightarrow[3]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ Nebenrechnung:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Also heißt die Aufgabe nun $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$

(f) $\log_{\sqrt[4]{27}} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{81}}$ Nebenrechnung:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{81}} = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{1}{2}-4}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{7}{6}}$$

Potenzkette: $\sqrt[4]{27} \xrightarrow[4]{} 27 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 3 \xrightarrow[-\frac{7}{6}]{} 3^{-\frac{7}{6}}$

Also lautet die Aufgabe jetzt: $\log_{\sqrt[4]{27}} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{81}} = \log_{\sqrt[4]{27}} 3^{-\frac{7}{6}} = -4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{6} = -\frac{14}{9}$

(g) $\log_{\sqrt{27}} \frac{\sqrt{3}}{3}$ NR.: $\frac{\sqrt{3}}{3} = 3^{\frac{1}{2}-1} = 3^{-\frac{1}{2}}$ Potenzkette:

$\sqrt{27} \xrightarrow[2]{} 27 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 3 \xrightarrow[-\frac{1}{2}]{} 3^{-\frac{1}{2}}$

$\log_{\sqrt{27}} \frac{\sqrt{3}}{3} = \log_{\sqrt{27}} 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$

(h) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2}}}$

NR.: $\frac{1}{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{\frac{7}{3}}}} = \frac{1}{\left(2^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{7}{9}}} = 2^{-\frac{7}{9}}$

Potenzkette:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[2]{} \frac{1}{2} = 2^{-1} \xrightarrow[\frac{7}{9}]{} 2^{-\frac{7}{9}} \quad !!!$$

Daher lautet die Aufgabe jetzt:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2}}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2^{-\frac{7}{9}} = \frac{14}{9}$$

§ 8 Lösungen zu § 2

Aufgabe 201 Fasse zusammen und berechne

(a) $\log_3 45+\log_3 15-\log_3 75$ (b) $\log_{10} 4+\log_{10} 5-\log_{10} 2$

(c) $2\cdot\log_a 15-3\cdot\log_a 3$ (d) $2\log_{25} 4+\log_{25} 5-4\log_{25} 2$

(e) $\frac{1}{3}\log_{\sqrt{6}} 27+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 4$ (f) $2\log_8 \frac{1}{2}+3\cdot\log_8 2$

(g) $\log_3 \frac{3}{4}+\log_3 \frac{8}{11}-\log_3 \frac{54}{11}$

Lösung

(a) $\log_3 45+\log_3 15-\log_3 75=\log_3 \frac{45\cdot 15}{75}=\log_3 9=2$

(b) $\log_{10} 4+\log_{10} 5-\log_{10} 2=\log_{10} \frac{4\cdot 5}{2}=\log_{10} 10=1$

(c) $2\cdot\log_a 15-3\cdot\log_a 3=\log_a 15^2-\log_a 3^3=\log_a \frac{225}{27}=\log_a \frac{25}{3}$

(d) $2\log_{25} 4+\log_{25} 5-4\log_{25} 2=\log_{25} 4^2+\log_{25} 5-\log_{25} 2^4$

$=\log_{25} 16+\log_{25} 5-\log_{25} 16=\log_{25} 5=\log_{25}\sqrt{25}=\log_{25} 25^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

(e) $\frac{1}{3}\log_{\sqrt{6}} 27+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 4=\log_{\sqrt{6}} 27^{\frac{1}{3}}+\log_{\sqrt{6}} 4^{\frac{1}{2}}=\log_{\sqrt{6}}\sqrt[3]{27}+\log_{\sqrt{6}}\sqrt{4}$

$=\log_{\sqrt{6}} 3+\log_{\sqrt{6}} 2=\log_{\sqrt{6}} 3\cdot 2=\log_{\sqrt{6}} 6=\log_{\sqrt{6}}\sqrt{6}^2=2$

(f) $2\log_8 \frac{1}{2}+3\cdot\log_8 2=2\cdot\log_8 2^{-1}+3\cdot\log_8 2$

$=-2\cdot\log_8 2+3\cdot\log_8 2=\underbrace{(-2+3)}_{1}\cdot\log_8 2=\log_8 2=\log_8 8^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$

oder: $=\log_8\left(\frac{1}{2}\right)^2+\log_8\left(2^3\right)=\log_8\left(\frac{1}{4}\cdot 8\right)=\log_8 2=\log_8 8^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$

(g) $\log_3 \frac{3}{4}+\log_3 \frac{8}{11}-\log_3 \frac{54}{11}=\log_3\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{11}{54}\right)=\log_3 \frac{3\cdot 2}{54}=\log_3 \frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$

Aufgabe 202 Vereinfache so weit wie möglich

(a) $\log_2 x^2 - \log_2 x$ (b) $\log_3 x^3 - \log_3 \frac{1}{x^2}$ (c) $\log_5(ab) - \log_5(a^2b)$

(d) $\log_4 x + \log_4 \frac{1}{x}$ (e) $\log_{10}\frac{1}{x} - \log_{10}\frac{2}{x}$ (f) $\log_7 x^3 - \log_7 \sqrt{x}$

(g) $\log_3(2u) - 2\log_3 u + \log_3 u^2 + \log_3 \frac{1}{u}$ (h) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt{4x} + \log_2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \log_2 4$

Lösung

(a) $\log_2 x^2 - \log_2 x = 2\cdot\log_2 x - \log_2 x = \log_2 x$

oder so: $\log_2 x^2 - \log_2 x = \log_2 \frac{x^2}{x} = \log_2 x$

(b) $\log_3 x^3 - \log_3 \frac{1}{x^2} = 3\cdot\log_3 x - \log_3 x^{-2} = 3\cdot\log_3 x + 2\log_3 x = 5\log_3 x$

oder so: $\log_3 x^3 - \log_3 \frac{1}{x^2} = \log_3 \frac{x^3}{\frac{1}{x^2}} = \log_3 x^5 = 5\cdot\log_3 x$

(c) $\log_5(ab) - \log_5(a^2b) = \log_5 a + \log_5 b - \log_5 a^2 - \log_5 b = \log_5 a - 2\log_5 a$

$= -\log_5 a \quad \left[= \log_5 \frac{1}{a} \right]$

oder so: $\log_5(ab) - \log_5(a^2b) = \log_5 \frac{ab}{a^2b} = \log_5 \frac{1}{a} = -\log_5 a$

(d) $\log_4 x + \log_4 \frac{1}{x} = \log_4 x - \log_4 x = 0$

oder so: $\log_4 x + \log_4 \frac{1}{x} = \log_4\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = \log_4 1 = 0$

(e) $\log_{10}\frac{1}{x} - \log_{10}\frac{2}{x} = -\log_{10} x - \log_{10} 2 + \log_{10} x = -\log_{10} 2$

oder so: $\log_{10}\frac{1}{x} - \log_{10}\frac{2}{x} = -\log_{10}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2}\right) = -\log_{10}\frac{1}{2} = \log_{10} 2$

(f) $\log_7 x^3 - \log_7 \sqrt{x} = 3\cdot\log_7 x - \frac{1}{2}\cdot\log_7 x = \frac{5}{2}\cdot\log_7 x$

oder so: $\log_7 x^3 - \log_7 \sqrt{x} = \log_7\left(\frac{x^3}{\sqrt{x}}\right) = \log_7 x^{\frac{5}{2}}$

(g) $\log_3(2u) - 2\log_3 u + \log_3 u^2 + \log_3 \frac{1}{u} = \log_3 2 + \log_3 u - 2\log_3 u + 2\log_3 u - \log_3 u$

$= \log_3 2$

oder so: $\log_3(2u) - 2\log_3 u + \log_3 u^2 + \log_3 \frac{1}{u} = \log_3\left(2u\cdot\frac{1}{u^2}\cdot u^2\cdot\frac{1}{u}\right) = \log_3 2$

(h) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt{4x} + \log_2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \log_2 4$

$= \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 \sqrt{4} - \log_2 \sqrt{x} + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 x^2 + \log_2 4$

$= \cancel{\frac{1}{2}\log_2 x} - \underbrace{\log_2 2}_{1} - \cancel{\frac{1}{2}\log_2 x} + \underbrace{\log_2 \frac{1}{2}}_{-1} + 2\cdot\log_2 x + \underbrace{\log_2 4}_{2} = 2\cdot\log_2 x$

oder so: $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt{4x} + \log_2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \log_2 4$

$= \log_2\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x}}\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot 4\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot 4\right) = \log_2\cdot x^2 = 2\cdot\log_2 x$

Aufgabe 203 Vereinfache so weit wie möglich

(a) $\log_3\left(a^2\right) - 2\cdot\log_3\left(a^4\right)$ (b) $\log_5\sqrt{b} + \log_5\sqrt{\frac{a}{b}} - \log_5\sqrt{5}$

(c) $\log_2 a^5 + \log_2\frac{1}{a^2} - \log_2\frac{a^3}{2} + \log_2 8$

(d) $\log_a 6 + \log_a(21a) - \log_a 63 + \log_a\sqrt{a}$

Lösung

(a) $\log_3\left(a^2\right) - 2\cdot\log_3\left(a^4\right) = 2\cdot\log_3 a - 8\cdot\log_3 a = -6\cdot\log_3 a$

(b) $\log_5\sqrt{b} + \log_5\sqrt{\frac{a}{b}} - \underbrace{\log_5\sqrt{5}}_{\frac{1}{2}} = \log_5\left(\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\right) - \frac{1}{2} = \log_5\sqrt{a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_5 a - \frac{1}{2}$

(c) $\log_2 a^5 + \log_2\frac{1}{a^2} - \log_2\frac{a^3}{2} + \log_2 8 = \log_2\left(a^5\cdot\frac{1}{a^2}\right) - \left[\log_2 a^3 - \underbrace{\log_2 2}_{1}\right] + \underbrace{\log_2 2^3}_{3}$

$= \log_2 a^3 - \log_2 a^3 + 1 + 3 = 4$

oder so:

$\log_2 a^5 + \log_2\frac{1}{a^2} - \log_2\frac{a^3}{2} + \log_2 8 = \log_2 a^5\cdot\frac{1}{a^2} - \log_2 a^3 + \log_2 2 + \log_2 8$

$= \cancel{\log_2 a^3} - \cancel{\log_2 a^3} + \log_2\underbrace{(2\cdot 8)}_{16} = \log_2 16 = 4$

(d) $\log_a 6 + \log_a(21a) - \log_a 63 + \log_a\sqrt{a}$

$= \log_a 6 + \log_a 21 + \underbrace{\log_a a}_{1} - \log_a 63 + \underbrace{\log_a a^{\frac{1}{2}}}_{\frac{1}{2}} = \log_a\frac{6\cdot 21}{63} + \frac{3}{2} = \log_a 2 + \frac{3}{2}$

Aufgabe 204 Fasse zusammen

(a) $\log_a x^2 + \log_a x^5 - \log_a x^6 =$ (b) $\log_a 4x + \log_a 4x^3 + \log_a 2x^2 =$

(c) $\log_a \frac{1}{x} + \log_a \sqrt{x} - \log_a x^3 =$ (d) $\log_a \frac{5}{x} + \log_a \frac{x}{5} - \log_a \sqrt[3]{x^2}$

(e) $2 \cdot \log_7 \left(2\sqrt{a}\right) - \log_7 (7a) + \log_7 \frac{7}{4}$

Lösung

(a) $\log_a x^2 + \log_a x^5 - \log_a x^6 = 2\log_a x + 5\log_a x - 6\log_a x = \log_a x$

oder: $\log_a x^2 + \log_a x^5 - \log_a x^6 = \log_a \dfrac{x^2 \cdot x^5}{x^6} = \log_a x^1 = \log_a x$

(b) $\log_a 4x + \log_a 4x^3 + \log_a 2x^2 = \log_a \left(4x \cdot 4x^3 \cdot 2x^2\right) = \log_a \left(32x^6\right)$

(c) $\log_a \frac{1}{x} + \log_a \sqrt{x} - \log_a x^3 = \log_a \left(\dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{x^3}\right) = \log_a \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^4}\right) = \log_a x^{\frac{1}{2}-4}$

$= \log_a x^{-\frac{7}{2}} = -\dfrac{7}{2} \cdot \log_a x$

(d) $\log_a \frac{5}{x} + \log_a \frac{x}{5} - \log_a \sqrt[3]{x^2} = \log_a \dfrac{\frac{5}{x} \cdot \frac{x}{5}}{\sqrt[3]{x^2}} = \log_a \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \log_a x^{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{2}{3}\log_a x$

(e) $2 \cdot \log_3 \left(2\sqrt{a}\right) - \log_3 (7a) + \log_3 \frac{7}{4}$

Nebenrechnung: $2 \cdot \log_3 \left(2\sqrt{a}\right) = \log_3 \left(2\sqrt{a}\right)^2 = \log_3 (4a)$

$= \log_7 \left[\dfrac{4a}{7a} \cdot \dfrac{7}{4}\right] = \log_7 1 = 0$

Aufgabe 205 Fasse zusammen und berechne

(a) $\log_b \frac{b}{a} + \log_b(a^2) - \log_b(a\sqrt{b})$ (b) $\log_a a^3 - \log_a b^2 + 2\log_a \frac{b}{a}$

(c) $\log_a \sqrt{ab} + \log_a \frac{b}{a^2} - \frac{3}{2}\log_a(ab)$ (d) $\left(\log_2 u^2 - \log_2 u + \log_2 \sqrt{u}\right) : \log_2 u^3$

Lösung 5

(a) 1. Möglichkeit:

$$\log_b \frac{b}{a} + \log_b(a^2) - \log_b(a\sqrt{b}) = \log_b \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{a\sqrt{b}} = \log_b \frac{b}{\sqrt{b}} = \log_b \sqrt{b} = \log_b b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

2. Möglichkeit:

$$\log_b \frac{b}{a} + \log_b(a^2) - \log_b(a\sqrt{b}) = \underbrace{\log_b b}_{=1} \underbrace{-\log_b a + 2\cdot\log_b a - \log_b a}_{=0} - \underbrace{\log_b \sqrt{b}}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(b) 1. Möglichkeit

$$\log_a a^3 - \log_a b^2 + \underbrace{2\log_a \frac{b}{a}}_{\log_a\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \log_a \frac{a^3}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} = \log_a a = 1$$

2. Möglichkeit

$$\log_a a^3 - \log_a b^2 + 2\log_a \frac{b}{a} = 3 - 2\cdot\log_a b + 2\cdot\left(\log_a b - \underbrace{\log_a a}_{1}\right) = 3 - 2 = 1$$

(c) 1. Möglichkeit

$$\log_a \sqrt{ab} + \log_a \frac{b}{a^2} - \underbrace{\tfrac{3}{2}\log_a(ab)}_{\log_a(ab)^{\frac{3}{2}}} = \log_a\left(\sqrt{ab}\cdot\frac{b}{a^2}\cdot\right) = \log_a\left((ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{(ab)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \log_a\left(\frac{b}{a^2(ab)}\right) = \log_a\left(\frac{1}{a^3}\right) = \log_a a^{-3} = -3$$

2. Möglichkeit

$$\log_a \sqrt{ab} + \log_a \frac{b}{a^2} - \tfrac{3}{2}\log_a(ab) = \log_a(ab)^{\frac{1}{2}} + \log_a b - \log_a a^2 - \tfrac{3}{2}\log_a(ab)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log_a(ab) + \log_a b - \log_a a^2 - \tfrac{3}{2}\log_a(ab) = -\log_a(ab) + \log_a b - \log_a a^2$$

$$= -\log_a a - \log_a b + \log_a b - 2\log_a a = -3\cdot\underbrace{\log_a a}_{1} = -3$$

(d) $$\left(\log_2 u^2 - \log_2 u + \log_2 \sqrt{u}\right) : \log_2 u^3 = \frac{\log_2\left[\frac{u^2}{u}\cdot\sqrt{u}\right]}{\log_2 u^3} = \frac{\log_2 \sqrt{u}}{\log_2 u^3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{\log_2 u}}{3\cdot\cancel{\log_2 u}} = \frac{1}{6}$$

Aufgabe 206 Fasse zusammen und berechne

(a) $\log_a(a^2-9)-\log_a(a^2+3a)-\log_a(a-3)$ für $a>3$

(b) $\log_a(a^2-4)-\log_a(a+2)-\log_a(a-2)+\log_a(a^2)$ für $a<2$

(c) $\log_a(x-1)+3\cdot\log_a(x+1)-\log_a(x^2-1)$ für $x>1$

(d) $\log_{10}(x+1)+2\cdot\log_{10}(x-1)-\log_{10}(x^2-1)$ für $x>1$

(e) $\log_3(x+5)-\log_3(5x+25)+2\cdot\log_3\left(\sqrt{5x}\right)$

(f) $\lg\left(x^3-4x\right)-\lg\left(x^2+2x\right)+\lg\dfrac{1}{x-2}$

(g) $\lg\dfrac{a^2+b^2}{a^3+ab^2}+\lg\dfrac{a^3-2a^2b+ab^2}{a-b}$

Lösung

(a) $$\log_a(a^2-9)-\log_a(a^2+3a)-\log_a(a-3)=\log_a\frac{a^2-9}{a(a+3)(a-3)}=\log_a\frac{1}{a}=-1$$

(b) $$\log_a(a^2-4)-\log_a(a+2)-\log_a(a-2)+\log_a(a^2)=\underbrace{\log_a\underbrace{\frac{a^2-4}{(a+2)(a-2)}}_{1}}_{\log 1=0}+2=2$$

(c) $$\log_a(x-1)+3\cdot\log_a(x+1)-\log_a(x^2-1)=\log_a\frac{(x-1)(x+1)^3}{(x^2-1)}=$$
$$=\log_a\underbrace{\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-1)}}_{1}\cdot(x+1)^2=2\cdot\log_a(x+1)$$

(d) $$\log_{10}(x+1)+\underbrace{2\cdot\log_{10}(x-1)}_{\log_{10}(x-1)^2}-\log_{10}(x^2-1)=\log_{10}\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x^2-1)}$$
$$=\log_{10}\underbrace{\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2-1)}}_{1}\cdot(x-1)=\log_{10}(x-1)$$

(e) $$\log_3(x+5)-\log_3(5x+25)+\underbrace{2\cdot\log_3\left(\sqrt{5x}\right)}_{\log_3\left(\sqrt{5x}\right)^2=\log_3(5x)}=\log_3\frac{x+5}{x(x+5)}\cdot 5x=\log_5 5=1$$

(f) $$\lg\left(x^3-4x\right)-\lg\left(x^2+2x\right)+\lg\frac{1}{x-2}=\lg\left[x\left(x^2-4\right)\right]-\lg\left[x(x+2)\right]+\lg\frac{1}{x-2}$$
$$=\lg\frac{x(x+2)(x-2)}{x(x+2)(x-2)}=\lg 1=0$$

(g) $$\lg\frac{a^2+b^2}{a^3+ab^2}+\lg\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{a-b}=\lg\frac{\cancel{(a^2+b^2)}}{a\cancel{(a^2+b^2)}}+\lg\frac{a\cdot(a-b)^{\cancel{2}}}{\cancel{a-b}}$$
$$=\lg\frac{1}{a}+\lg\left[a(a-b)\right]=\lg\left[\frac{1}{a}\cdot a\cdot(a-b)\right]=\lg(a-b)$$

§ 9 Lösungen zu § 3

Aufgabe 301

Gegeben ist $\log_3 8 \approx 1{,}89$, $\log_3 10 = 2{,}10$

Berechne daraus:

$\log_3 80$, $\log_3 64$, $\log_3 0{,}1$, $\log_3 0{,}125$, $\log_3 2$, $\log_3 5$, $\log_3 \sqrt[3]{40}$, $\log_3 24$

Lösung

$$\log_3 80 = \log_3 (8 \cdot 10) = \log_3 8 + \log_3 10 \approx 1{,}89 + 2{,}10 = 3{,}99$$

$$\log_3 64 = \log_3 8^2 = 2 \cdot \log_3 8 \approx 2 \cdot 1{,}89 = 3{,}78$$

$$\log_3 0{,}1 = \log_3 \tfrac{1}{10} = -\log_3 10 \approx -2{,}10$$

$$\log_3 0{,}125 = \log_3 \tfrac{1}{8} = -\log_3 8 \approx -1{,}89$$

$$\log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{8} = \log_3 8^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{3} \cdot \log_3 8 \approx \frac{1{,}89}{3} = 0{,}63$$

$$\log_3 5 = \log_3 \frac{10}{2} = \log_3 10 - \log_3 2 \approx 2{,}10 - 0{,}63 = 1{,}47$$

$$\log_3 \sqrt[3]{40} = \log_3 40^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{3} \cdot \log_3 40 = \tfrac{1}{3} \cdot \log_3 (5 \cdot 8) = \frac{\log_3 5 + \log_3 8}{3}$$
$$\approx \frac{1{,}47 + 1{,}89}{3} = 1{,}12$$

$$\log_3 24 = \log_3 (3 \cdot 8) = \log_3 3 + \log_3 8 = 1 + 1{,}89 = 2{,}89$$

Aufgabe 302

Gegeben ist $\log_5 12 \approx 1{,}544$, $\log_5 3 \approx 0{,}683$

Berechne daraus:

$\log_5 4$, $\log_5 2$, $\log_5 100$, $\log_5 0{,}4$, $\log_5 360$, $\log_5 \frac{9}{5}$, $\log_5 \frac{25}{144}$.

Lösung

$$\log_5 4 = \log_5 \tfrac{12}{3} = \log_5 12 - \log_5 3 \approx 1{,}544 - 0{,}683 = 0{,}861$$

$$\log_5 2 = \log_5 \sqrt{4} = \log_5 4^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \log_5 4 \approx \tfrac{0{,}861}{2} \approx 0{,}431 \quad \text{(auf 3 Dez. runden !)}$$

$$\begin{aligned}\log_5 100 &= \log_5 10^2 = 2 \cdot \log_5 10 = 2 \cdot \log_5 (5 \cdot 2) = 2 \cdot [\log_5 5 + \log_5 2] \\ &= 2 \cdot [1 + 0{,}431] = 2 \cdot 1{,}431 = 2{,}862\end{aligned}$$

$$\log_5 0{,}4 = \log_5 \tfrac{2}{5} = \log_5 2 - \log_5 5 \approx 0{,}431 - 1 = -0{,}569$$

$$\begin{aligned}\log_{5+} 360 &= \log_5 (2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 12) = \log_5 2 + \log_5 5 + \log_5 3 + \log_5 12 \approx \\ &\approx 0{,}431 + 1 + 0{,}683 + 1{,}544 = 3{,}658\end{aligned}$$

$$\log_5 \tfrac{9}{5} = \log_5 9 - \log_5 5 = \log_5 3^2 - 1 = 2 \cdot \log_5 3 - 1 \approx 2 \cdot 0{,}683 - 1 = 0{,}366$$

$$\begin{aligned}\log_5 \tfrac{25}{144} &= \log_5 25 - \log_5 144 = 2 - \log_5 12^2 = 2 - 2 \cdot \log_5 12 \\ &= 2 - 2 \cdot 1{,}544 = -1{,}088\end{aligned}$$

Aufgabe 303

Gegeben ist $\log_e 9 \approx 2{,}197$ und $\log_e 0{,}9 = -0{,}105$.

Berechne daraus:

$\log_e 10$, $\log_e 27$, $\log_e 30$, $\log_e \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\log_e \sqrt[4]{27}$

Lösung

$$\log_e 10 = \log_e \frac{9}{0{,}9} = \log_e 9 - \log_e 0{,}9 \approx 2{,}197 + 0{,}105 = 2{,}302$$

$$\log_e 27 = \log_e 3^3 = 3 \cdot \log_e 3 \approx 3 \cdot 1{,}099 = 3{,}297$$

Nebenrechnung: $\log_e 3 = \log_e \sqrt{9} = \log_e 9^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \log_e 9 \approx \tfrac{2{,}197}{2} = 1{,}099$

$$\log_e 30 = \log_e (10 \cdot 3) = \log_e 10 + \log_e 3 \approx 2{,}302 + 1{,}099 = 3{,}401$$

$$\log_e \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_e 3^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} \cdot \log_e 3 \approx -\frac{1{,}099}{3} \approx 0{,}366$$

$$\log_e \sqrt[4]{27} = \log_e 3^{\frac{3}{4}} = \tfrac{3}{4} \cdot \log_e 3 \approx \frac{3 \cdot 1{,}099}{4} \approx 0{,}824$$

Aufgabe 304

Gegeben sind $\log_9 8 = 0{,}9464$ und $\log_9 5 = 0{,}7325$.

Berechne daraus der Reihe nach

$\log_9 2$; $\log_9 10$; $\log_9 16$; $\log_9 0{,}8$; $\log_9 9$;... $\log_9 1000$; $\log_9 0{,}625$;
$\log_9 12{,}5$; $\log_9 \sqrt{8}$; $\log_9 \frac{1}{8}$; $\log_9 \sqrt[3]{5}$; $\log_9 2\sqrt{5}$

Lösung

$$\log_9 2 = \log_9 \sqrt[3]{8} = \log_9 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_9 8 = \frac{0{,}9464}{3} = 0{,}3155$$

$$\log_9 10 = \log_9 (2 \cdot 5) = \log_9 2 + \log_9 5 = 0{,}3155 + 0{,}7325 = 1{,}0480$$

$$\log_9 16 = \log_9 2^4 = 4 \cdot \log_9 2 = 4 \cdot 0{,}3155 = 1{,}2620$$

$$\log_9 0{,}8 = \log_9 \tfrac{4}{5} = \log_9 4 - \log_9 5 = \log_9 2^2 - \log_9 5 = 2 \cdot \log_9 2 - \log_9 5 = -0{,}1015$$

$$\log_9 9 = 1$$

$$\log_9 1000 = \log_9 10^3 = 3 \cdot \log_9 10 = 3 \cdot 1{,}0480 = 3{,}1440$$

$$\log_9 0{,}625 = \log_9 \tfrac{5}{8} = \log_9 5 - \log_9 8 = 0{,}7325 - 0{,}9464 = -0{,}2139$$

$$\log_9 12{,}5 = \log_9 \tfrac{125}{10} = \log_9 \tfrac{25}{2} = \log_9 25 - \log_9 2 = 2 \cdot \log_9 5 - \log_9 2$$
$$= 2 \cdot 0{,}7325 - 0{,}3155 = 1{,}1495$$

$$\log_9 \sqrt{8} = \log_9 2^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2} \cdot \log_9 2 = \tfrac{3}{2} \cdot 0{,}3155 = 0{,}4733$$

$$\log_9 \tfrac{1}{8} = \log_9 2^{-3} = -3 \cdot \log_9 2 = -3 \cdot 0{,}3155 = -0{,}9465$$

$$\log_9 \sqrt[3]{5} = \log_9 5^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{3} \cdot \log_9 5 = \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}7325 = 0{,}2442$$

$$\log_9 2\sqrt{5} = \log_9 2 + \log_9 5^{\frac{1}{2}} = \log_9 2 + \tfrac{1}{2} \cdot \log_9 5 = 0{,}1183 + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}7325 = 0{,}4846$$

Aufgabe 305

Gegeben sind $\mathbf{log_2} 15 = 3{,}9069$ und $\mathbf{log_2} 3 = 1{,}5850$.
Berechne daraus die Zweierlogarithmen von

5; 135; 225; 30; 6; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{9}$; $\frac{9}{5}$ und $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Lösung

$$\log_2 5 = \log_2 \frac{15}{3} = \log_2 15 - \log_2 3 = 3{,}9069 - 1{,}5850 = 2{,}3219$$

$$\log_2 135 = \log_2 (9 \cdot 15) = \log_2 3^2 + \log_2 15 = 2 \cdot \log_2 3 + \log_2 15 = 2 \cdot 1{,}5850 + 3{,}9069 = 7{,}0769$$

$$\log_2 225 = \log_2 (9 \cdot 25) = \log_2 9 + \log_2 25 = \log_2 3^2 + \log_2 5^2 = 2 \cdot \log_2 3 + 2 \cdot \log_2 5 =$$
$$= 2 \cdot 1{,}5850 + 2 \cdot 2{,}3219 = 7{,}8138$$

$$\log_2 30 = \log_2 (15 \cdot 2) = \log_2 15 + \log_2 2 = 3{,}9069 + 1 = 4{,}9069$$
denn $\log_2 2 = 1$!!!

$$\log_2 6 = \log_2 (3 \cdot 2) = \log_2 3 + \log_2 2 = 1{,}5850 + 1 = 2{,}5850$$

$$\log_2 \tfrac{1}{5} = \log_2 5^{-1} = -\log_2 5 = -2{,}3219$$

$$\log_2 \tfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \text{ !!!!}$$

$$\log_2 \sqrt{5} = \log_2 5^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \log_2 5 = \frac{2{,}3219}{2} = 1{,}1610$$

$$\log_2 \sqrt[3]{9} = \log_2 3^{\frac{2}{3}} = \tfrac{2}{3} \cdot \log_2 3 = \tfrac{2}{3} \cdot 1{,}5850 = 1{,}0567$$

$$\log_2 \tfrac{9}{5} = \log_2 9 - \log_2 5 = 2 \cdot \log_2 3 - \log_2 5 = 0{,}8481$$

$$\log_2 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_2 3^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} \log_2 3 = -0{,}7925$$

Aufgabe 306

Gegeben sind $\log_3 5 = 1{,}4650$ und $\log_3 8 = 1{,}8928$

Berechne **daraus** mit ausführlicher Zwischenrechnung auf 4 Dezimalen

(a) $\log_3 2$ (b) $\log_3 200$ (c) $\log_3 15$ (d) $\log_3 \frac{4}{9}$

(e) $\log_3 4$ (f) $\log_3 24$ (g) $\log_3 \frac{25}{3}$

Lösung

(a) $\log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{8} = \frac{1}{3} \cdot \log_3 8 \approx \dfrac{1{,}8928}{3} \approx 0{,}6309$

(b) $\log_3 200 = \log_3 (8 \cdot 25) = \log_3 8 + \log_3 5^2 = \log_3 8 + 2 \cdot \log_3 5$
$\approx 1{,}8928 + 2 \cdot 1{,}4650 \approx 4{,}8228$

(c) $\log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 \approx 1 + 1{,}4650 \approx 2{,}4650$

(d) $\log_3 \dfrac{4}{9} = \log_3 4 - \log_3 9 = \log_3 8^{\frac{2}{3}} - \log_3 3^2 = \frac{2}{3} \cdot \log_3 8 - 2 \approx -0{,}7381$

(e) $\log_3 4 = \log_3 8^{\frac{2}{3}} \approx \dfrac{2 \cdot 1{,}893}{3} = 2 \cdot 0{,}631 = 1{,}262$

(f) $\log_3 24 = \log_3 (3 \cdot 8) = \log_3 3 + \log_3 8 = 1 + 1{,}893 = 2{,}893$

(g) $\log_3 \dfrac{25}{3} = \log_3 \dfrac{5^2}{3} = 2 \cdot \log_3 5 - \log_3 3 = 2{,}930 - 1 = 1{,}930$

Aufgabe 307

Gegeben sind diese Logarithmen: $\log_{12} 3 \approx 0{,}4421$ und $\log_{12} 5 \approx 0{,}6477$

Berechne daraus ohne Taschenrechner (also begründet durch Logarithmusregeln) die folgenden Zahlen:

a) $\log_{12} 15$ b) $\log_{12} 0{,}6$ c) $\log_{12} \sqrt[4]{27}$

d) $\log_{12} 12$ e) $\log_{12} 4$ f) $\log_{12} \frac{1}{60}$

Lösung

a) $\log_{12} 15 = \log_{12} 3 + \log_{12} 5 \approx 0{,}4421 + 0{,}6477 = 1{,}0898$

b) $\log_{12} 0{,}6 = \log_{12} \frac{3}{5} = \log_{12} 3 - \log_{12} 5 \approx 0{,}4421 - 0{,}6477 = -0{,}2056$

c) $\log_{12} \sqrt[4]{27} = \log_{12} 3^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \log_{12} 3 \approx \frac{3}{4} \cdot 0{,}4421 \approx 0{,}3316$

d) $\log_{12} 12 = 1$

e) $\log_{12} 4 = \log_{12} \frac{12}{3} = \log_{12} 12 - \log_{12} 3 \approx 1 - 0{,}4421 = 0{,}5579$

f) $\log_{12} \frac{1}{60} = \log_{12} 60^{-1} = -\log_{12} 60 = -\log_{12} (5 \cdot 12) = -[\log_{12} 5 + \log_{12} 12]$
$\approx -[0{,}6477 + 1] = -1{,}6477$

Aufgabe 308

Gegeben sind diese Logarithmen: $\log_5 6 = 1{,}113$ und $\log_5 3 = 0{,}683$

Berechne ohne Taschenrechner daraus:

a) $\log_5 2$ b) $\log_5 100$ c) $\log_5 \sqrt[4]{27}$ d) $\log_5 \sqrt{\frac{3}{5}}$

Lösung

a) $\log_5 2 = \log_5 \frac{6}{3} = \log_5 6 - \log_5 3 = 0{,}430$

b) $\log_5 100 = \log_5 (4 \cdot 25) = \log_5 2^2 + \log_5 5^2 = 2 \cdot \log_5 2 + 2 = 0{,}86 + 2 = 2{,}86$

c) $\log_5 \sqrt[4]{27} = \log_5 3^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \log_5 3 = \frac{3}{4} \cdot 0{,}683 = 0{,}512$

d) $\log_5 \sqrt{\frac{3}{5}} = \log_5 \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (\log_5 3 - \log_5 5) = \frac{1}{2} \cdot (0{,}683 - 1) = 0{,}1585$

§ 10 Lösungen zu § 4

411 Aufgaben zu Typ 1

(a) $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{1}{25} = x$

(b) $\log_{\sqrt[3]{25}} \frac{1}{\sqrt{5}} = x$

(c) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$

(d) $\log_{a^2} \sqrt[3]{a} = x$

Lösung

a) $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{1}{25} = x$ Potenzkette: $\sqrt[3]{5} \xrightarrow[3]{} 5 \xrightarrow[2]{} 25 \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{25}$

also ist $\frac{1}{25} = \left(\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\right)^2\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^{-6}$, d.h. x = - 6 und $\mathbb{L} = \{-6\}$

b) $\log_{\sqrt[3]{25}} \frac{1}{\sqrt{5}} = x$ Potenzkette: $\sqrt[3]{25} \xrightarrow[3]{} 25 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 5 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{5} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{\sqrt{5}}$

also ist $\frac{1}{\sqrt{5}} = \left(\left(\left(\left(\sqrt[3]{25}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{25}\right)^{-\frac{3}{4}}$ d.h. $x = -\frac{3}{4}$ und $\mathbb{L} = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

(c) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$ Potenzkette: $\frac{1}{3} \xrightarrow[-1]{} 3 \xrightarrow[2]{} 9$

also ist $9 = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ d.h. $x = -2$ und $\mathbb{L} = \{-2\}$

(d) $\log_{a^2} \sqrt[3]{a} = x$ Potenzkette: $a^2 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} a \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

also ist $\sqrt[3]{a} = \left(\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{6}}$, d.h. $x = \frac{1}{6}$ und $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

421 Aufgaben zu Typ 2: Gesucht ist die Basis

(a) $\log_x 512 = 9$

(b) $\log_x 16 = 4$

(c) $\log_x 27 = 3;$

(d) $\log_x 2 = 4$

(e) $\log_x 64 = 4$

(f) $\log_x 9 = 4$

(g) $\log_x 8 = 6$

(h) $\log_x \frac{1}{25} = 4$

Lösung

(a)
$$\log_x 512 = 9$$
$$x^9 = 512 = 2^9$$
$$x = 2$$
$$\mathbf{L} = \{2\}$$

(b)
$$\log_x 16 = 4$$
$$x^4 = 16 = 2^4$$
$$x = \pm 2$$
$$\mathbf{L} = \{2\}$$

(c)
$$\log_x 27 = 3;$$
$$x^3 = 27 = 3^3$$
$$x = 3$$
$$\mathbf{L} = \{3\}$$

(d)
$$\log_x 2 = 4$$
$$x^4 = 2$$
$$x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt[4]{2^2} = \pm\sqrt{2}\ !!$$
$$\mathbf{L} = \left\{+\sqrt[4]{2}\right\}$$ (Basis muß positiv sein!)

(e)
$$\log_x 64 = 4$$
$$x^4 = 64$$
$$x^4 = 2^6$$
$$x_{1,2} = \pm 2^{\frac{6}{4}} = \pm 2^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{8}$$
$$\mathbf{L} = \left\{\sqrt{8}\right\}$$

(f)
$$\log_x 9 = 4$$
$$x^4 = 9$$
$$x = \pm\sqrt[4]{9} = \pm\sqrt[4]{3^2} = \pm\sqrt{3}$$
$$\mathbf{L} = \left\{\sqrt{3}\right\}$$

(g)
$$\log_x 8 = 6$$
$$x^6 = 8$$
$$x = \pm\sqrt[6]{8} = \pm\sqrt[6]{2^3} = \pm\sqrt{2}$$
$$\mathbf{L} = \left\{\sqrt{2}\right\}$$

(h)
$$\log_x \tfrac{1}{25} = 4$$
$$x^4 = \tfrac{1}{25}$$
$$x = \pm\sqrt[4]{\tfrac{1}{25}} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{5^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\mathbf{L} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

431 Aufgaben zu Typ 3: Gesucht ist das Argument

(a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$ $\log_{\sqrt{3}} x = 8$ $\log_{\sqrt{5}} x = 6$ $\log_9 x = \frac{1}{4}$

(b) $\log_2 x = -5$ $\log_{\sqrt{3}} x = -3$ $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ $\log_{\sqrt[3]{4}} x = 2$

(c) $\log_{64} x = \frac{2}{3}$ $\log_{25} x = -\frac{1}{4}$ $\log_{125} x = \frac{4}{3}$ $\log_{32} x = 0{,}2$

(d) $\log_{27} x = -\frac{1}{3}$ $\log_{\sqrt{2}} x = 10$ $\log_{25} x = -\frac{1}{4}$ $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

(e) $\log_5 x = 3$ $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$ $\log_{81} x = -\frac{3}{2}$ $\log_{\frac{2}{3}} x = 8$

(f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8 = x$ $\log_{\sqrt{2}} x = 10$ $\log_{\sqrt{3}} x = -2$ $\log_{\sqrt[3]{5}} x = 6$

Lösung

(a) $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$ $x = 25^{-\frac{1}{2}}$ $x = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$ $\mathbf{L} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$	$\log_{\sqrt{3}} x = 8$ $x = \sqrt{3}^8 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 8}$ $x = 3^4 = 81$ $\mathbf{L} = \{81\}$	$\log_{\sqrt{5}} x = 6$ $x = \sqrt{5}^6 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 6}$ $x = 5^3 = 125$ $\mathbf{L} = \{125\}$	$\log_9 x = \frac{1}{4}$ $x = 9^{\frac{1}{4}} = 3^{2\cdot\frac{1}{4}}$ $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $\mathbf{L} = \left\{\sqrt{3}\right\}$
(b) $\log_2 x = -5;$ $x = 2^{-5}$ $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ $\mathbf{L} = \left\{\frac{1}{32}\right\}$	$\log_{\sqrt{3}} x = -3;$ $x = \sqrt{3}^{-3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ $x = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ $\mathbf{L} = \left\{\frac{1}{9}\sqrt{3}\right\}$	$\log_{\frac{1}{3}} x = -2;$ $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $x = 3^2 = 9$ $\mathbf{L} = \{9\}$	$\log_{\sqrt[3]{4}} x = 2$ $x = \sqrt[3]{4}^2 = 2^{\frac{4}{3}}$ $x = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2^1 \cdot \sqrt[3]{2}$ $\mathbf{L} = \left\{2\sqrt[3]{2}\right\}$

(c) $\log_{64} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 64^{\frac{2}{3}} = \left(2^6\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{6\cdot\frac{2}{3}} = 2^4 = 16$ $\mathbf{L} = \{16\}$

$\log_{25} x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 25^{-\frac{1}{4}} = \left(5^2\right)^{-\frac{1}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\mathbf{L} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$

$\log_{125} x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 125^{\frac{4}{3}} = \left(5^3\right)^{\frac{4}{3}} = 5^4 = 625$ $\mathbf{L} = \{625\}$

$\log_{32} x = 0{,}2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 32^{\frac{1}{5}} = 2$ $\mathbf{L} = \{2\}$

(d) $\log_{27} x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbf{L} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$\log_{\sqrt{2}} x = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}^{10} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 10} = 2^5 = 32$ $\quad \mathbf{L} = \{32\}$

$\log_{25} x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 25^{-\frac{1}{4}} = \left(5^2\right)^{-\frac{1}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \mathbf{L} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$

$\log_{16} x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 16^{\frac{3}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$ $\quad \mathbf{L} = \{8\}$

(e) $\log_5 x = 3 \Leftrightarrow x = 5^3 = 125$ $\quad \mathbf{L} = \{125\}$

$\log_{25} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$ $\quad \mathbf{L} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

$\log_{81} x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 81^{-\frac{3}{2}} = \left(3^4\right)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-6} = \frac{1}{729}$ $\quad \mathbf{L} = \left\{\frac{1}{729}\right\}$

$\log_{\frac{2}{3}} x = 8 \Leftrightarrow x = 8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ $\quad \mathbf{L} = \{4\}$

(f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8 = x$ Wegen $\frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[-1]{} \sqrt{2} \xrightarrow[2]{} 2 \xrightarrow[3]{} 8$ folgt. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-6} = 8$.

oder so: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x} = 8 \Leftrightarrow 2^{-\frac{1}{2}x} = 2^3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = -6$

Ergebnis: $\mathbf{L} = \{-6\}$

$\log_{\sqrt{2}} x = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}^{10} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 10} = 2^5 = 32$ $\quad \mathbf{L} = \{32\}$

$\log_{\sqrt{3}} x = -2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}^{-2} = \frac{1}{\sqrt{3}^2} = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbf{L} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$\log_{\sqrt[3]{5}} x = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}^{6} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 5^2 = 25$ $\quad \mathbf{L} = \{25\}$

441 Aufgaben zu Typ 4: Argument als Term

(a) $\log_3\left(2x-\frac{5}{3}\right)=-1$

(b) $\log_3(x+80)=4$

(c) $\log_5(x+1)=3$

(d) $\log_4(5x-1)=-1$

(e) $\log_2\left(x^2-1\right)=4$

(f) $\log_5 x^2=3$

(g) $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-1\right)=4$

(h) $\log_{\sqrt[3]{2}}\left(x^2+1\right)=6$

Lösung

(a)
$$\log_3\left(2x-\tfrac{5}{3}\right)=-1$$
$$2x-\tfrac{5}{3}=3^{-1}$$
$$2x-\tfrac{5}{3}=\tfrac{1}{3}$$
$$2x=2$$
$$x = 1$$
$$\mathbf{L}=\{1\}$$

(a)
$$\log_3(x+80)=4$$
$$x+80=3^4$$
$$x=81-80$$
$$x=1$$
$$\mathbf{L} = \{1\}$$

(c)
$$\log_5(x+1)=3$$
$$x+1=5^3$$
$$x=124$$
$$\mathbf{L}=\{124\}$$

(d)
$$\log_4(5x-1)=-1$$
$$5x-1=4^{-1}$$
$$5x=1+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{4}$$
$$x=\tfrac{1}{4}$$
$$\mathbf{L}=\left\{\tfrac{1}{4}\right\}$$

(e)
$$\log_2\left(x^2-1\right)=4$$
$$x^2-1=2^4$$
$$x^2=17$$
$$x=\pm\sqrt{17}$$
$$\mathbf{L} = \left\{\pm\sqrt{17}\right\}$$

(f)
$$\log_5 x^2=3$$
$$x^2=5^3=125$$
$$x=\pm\sqrt{125}=\pm5\sqrt{5}$$
$$\mathbf{L}=\left\{\pm5\sqrt{5}\right\}$$

(g)
$$\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-1\right)=4$$
$$x^2-1=\sqrt{2}^4$$
$$x^2=4$$
$$x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$$
$$\mathbf{L}=\left\{\pm\sqrt{5}\right\}$$

(h)
$$\log_{\sqrt[3]{2}}\left(x^2+1\right)=6$$
$$x^2+1=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=2^2=4$$
$$x^2=3$$
$$x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$$
$$\mathbf{L}=\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$$

442 Aufgaben zu Typ 4: x in Argument und Basis

(a) $\log_x(6-x)=2$

(b) $\log_x\left(x-\frac{8}{3}\right)=-1$

(c) $\log_x(x+6)=2$

(d) $\log_x(10-3x)=2$

(e) $\log_x\left(x-\frac{15}{4}\right)=-1$

(f) $\log_x(x+2)=2$

(g) $\log_x(x+6)=2$

(h) $\log_x(15-2x)=2$

(i) $\log_x\left(32-4x^2\right)=4$

Lösung

(a)
$$\log_x(6-x)=2$$
$$x^2=6-x$$
$$x^2+x-6=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{cases}-3\notin\mathbf{D}\\ 2\end{cases}$$
$$\mathbf{L}=\{2\}$$

(b)
$$\log_x\left(x-\tfrac{8}{3}\right)=-1$$
$$x^{-1}=x-\tfrac{8}{3}\quad|\cdot3x$$
$$3=3x^2-8x$$
$$3x^2-8x-3=0$$
$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\frac{8\pm10}{6}$$
$$x_1=3;\quad x_2=-\tfrac{1}{3}\notin\mathbf{L}$$
$$\mathbf{L}=\{3\}$$

(c)
$$\log_x(x+6)=2$$
$$x^2=x+6$$
$$x^2-x-6=0$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2}=\begin{cases}3\\-2\end{cases}$$
$$\mathbf{L}=\{3\}$$

Negative Zahlen scheiden als Basis aus!

(d)
$$\log_x(10-3x)=2$$
$$x^2=10-3x$$
$$x^2+3x-10=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\begin{cases}2\\-5\end{cases}$$
$$\mathbf{L}=\{2\}$$

(e)
$$\log_x\left(x-\frac{15}{4}\right)=-1$$
$$x^{-1}=x-\frac{15}{4}\quad|\cdot4x$$
$$4=4x^2-15x$$
$$4x^2-15x-4=0$$
$$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225+64}}{8}$$
$$x_{1,2}=\frac{15\pm17}{8}=\begin{cases}4\\-\tfrac{1}{4}\notin\mathbf{L}\end{cases}$$
$$\mathbf{L}=\{4\}$$

(f)
$$\log_x(x+2)=2$$
$$x^2=x+2$$
$$x^2-x-2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}=\begin{cases}2\\-1\notin\mathbf{L}\end{cases}$$
$$\mathbf{L}=\{2\}$$

(g) $\log_x(x+6)=2$

$x^2 = x+6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \notin \mathbb{L} \end{cases}$

$\mathbb{L} = \{3\}$

(h) $\log_x(15-2x)=2$

$x^2 = 15-2x$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \notin \mathbb{L} \end{cases}$

$\mathbb{L} = \{3\}$

(i) $\log_x\left(32-4x^2\right)=4$

$x^4 = 32-4x^2$

$x^4 + 4x^2 - 32 = 0$

Dies ist eine biquadratische Gleichung, also eine quadratische Gleichung für x^2 !

$x^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16+128}}{2} = \frac{-4 \pm 12}{2} = \begin{cases} 4 \\ -8 \end{cases}$

Aus $x^2 = 4$ folgt $x_{1,2} = \pm 2$,

aus $x^2 = -8$ folgt keine reelle Lösung.

-2 scheidet außerdem als Basis aus:

$\mathbb{L} = \{2\}$.

443 Aufgaben zu Typ 4: Mit Summe von Logarithmen

(a) $\log_2(x-3)+\log_2(x+4)=3$

(b) $\log_2(x-5)+\log_2(x+3)=3$

(c) $\log_9(x-4)+\log_9(x-2)=\frac{1}{2}$

(d) $\log_7(x-2)+\log_7(x+4)=1$

(e) $\lg x+\lg(x+4)=\lg 21$

(f) $\log_4(x+3)+\log_4(x+2)=\frac{1}{2}$

(g) $\log_x 2+\log_x(x+12)=2$

(h) $\log_6(x+2)+\log_6(x-3)=1$

(i) $\log_6(x+4)+\log_6(x-4)=1+\log_6 x$

Lösung

(a)
$$\log_2(x-3)+\log_2(x+4)=3$$
$$\log_2(x-3)(x+4)=3$$
$$\log_2(x^2+x-12)=3$$
$$x^2+x-12=2^3 \Leftrightarrow x^2+x-20=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\pm 9}{2}$$
$x_1=4$; $x_2=-5\notin\mathbf{L}$, denn -5 ergibt negative Argumente!

$\mathbf{L}=\{4\}$

(b)
$$\log_2(x-5)+\log_2(x+3)=3$$
$$\log_2(x-5)(x+2)=3$$
$$\log_2(x^2-3x-10)=3$$
$$x^2-3x-10=2^3 \Leftrightarrow x^2-3x-18=0$$
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm 9}{2}$$
$x_1=6$; $x_2=-3\notin\mathbf{L}$, denn -3 ergibt negative Argumente!

$\mathbf{L}=\{6\}$

(c)
$$\log_9(x-4)+\log_9(x-2)=\frac{1}{2}$$
$$\log_9(x-4)(x-2)=\frac{1}{2}$$
$$\log_9(x^2-6x+8)=\frac{1}{2}$$
$$x^2-6x+8=9^{\frac{1}{2}}=3$$
$$x^2-6x+5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\begin{cases}5\\1\end{cases}$$
$\mathbf{L}=\{5\}$, denn 1 ergibt negatives Argument und scheidet daher aus !

(d) $\log_7(x-2)+\log_7(x+4)=1$

$\log_7(x-2)(x+4)=1$

$\log_7(x^2+2x-8)=1$

$x^2+2x-8=7^1$

$x^2+2x-15=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases}3\in\mathbf{L}\\-5\notin\mathbf{L}\end{cases}$$

-5 erzeugt bei der **Probe** negative Argumente und scheidet daher aus !

$\mathbf{L}=\{3\}$

(e) $\lg x+\lg(x+4)=\lg 21$

$\lg(x^2+4x)=\lg 21$

$x^2+4x=21$

$x^2+4x-21=0$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{-4\pm 10}{2}=\begin{cases}3\\-7\end{cases}$$

$\mathbf{L}=\{3\}$

$x_2=-7\notin\mathbf{L}$, denn - 7 erzeugt negative Argumente.

(f) $\log_4(x+3)+\log_4(x+2)=\frac{1}{2}$

$\log_4(x+3)(x+2)=4^{\frac{1}{2}}$

$(x+3)(x+2)=2$

$x^2+5x+4=0$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{cases}-1\\-4\end{cases}$$

Da für x_1 = - 4 die Argumente negativ werden, scheidet es aus. $\mathbf{L}=\{-1\}$

(g) $\log_x 2+\log_x(x+12)=2$

$\log_x 2\cdot(x+12)=2$

$\log_x(2x+24)=2$

$x^2=2x+24$

$x^2-2x-24=0$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{2\pm 10}{2}=\begin{cases}6\\-4\end{cases}$$

Da eine Basis nicht negativ sein darf, scheidet – 4 aus.

$\mathbf{L}=\{\ 6\ \}$

(h) $\log_6(x+2)+\log_6(x-3)=1$

$\log_6[(x+2)(x-3)]=1$

$x^2-x-6=6^1$

$x^2-x-12=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}4\\-3\end{cases}$

-3 scheidet aus, weil das Argument nicht negativ werden darf.

$\mathbf{L}=\{4\}$.

(i) $\log_6(x+4)+\log_6(x-4)=1+\log_6 x$

$\log_6(x+4)(x-4)=1+\log_6 x$

$\log_6(x^2-16)-\log_6 x=1$

$\log_6\dfrac{(x^2-16)}{x}=1$

$\dfrac{x^2-16}{x}=6 \;\Leftrightarrow\; x^2-16=6x$

$x^2-6x-16=0$

$x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\dfrac{6\pm 10}{2}=\begin{cases}8\\-2\end{cases}$

$\mathbf{L}=\{8\}$, denn -2 erzeugt negative Argumente.

444 Aufgaben zu Typ 4: Mit Differenz von Logarithmen

a) $\log_4(x+2)-\log_4(x-1)=\frac{1}{2}$ (b) $\log_5(x+2)-\log_5(x-2)=1$

(c) $\log_3(x^2-9)-\log_3(x+3)=3$ (d) $\log_2(x-4)-\log_2(x^2-16)=-4$

Lösung

(a) $\log_4(x+2)-\log_4(x-1)=\frac{1}{2}$

$$\log_4\frac{x+2}{x-1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x+2}{x-1}=4^{\frac{1}{2}}=2$$

$x+2=2(x-1)$ also $x+2=2x-2$ ergibt $x=4$ mit $\mathbf{L}=\{\,4\,\}$

(b) $\log_5(x+2)-\log_5(x-2)=1$

$$\log_5\frac{x+2}{x-2}=1$$

$$\frac{x+2}{x-2}=5^1$$

$x+2=5\cdot(x-2) \;\Leftrightarrow\; x+2=5x-10 \;\Leftrightarrow\; 4x=12 \;\Leftrightarrow\; x=3$ mit $\mathbf{L}=\{\,3\,\}$

(c) $\log_3(x^2-9)-\log_3(x+3)=3$

$$\log_3\frac{x^2-9}{x+3}=3$$

$$\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{(x+3)}}=3^3=27$$

$x-3=27 \;\Leftrightarrow\; x=30$ mit $\mathbf{L}=\{30\}$

(d) $\log_2(x-4)-\log_2(x^2-16)=-4$

$$\log_2\frac{x-4}{x^2-16}=-4$$

$$\frac{\cancel{x-4}}{(x+4)\cancel{(x-4)}}=2^{-4}$$

$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{16} \;\Leftrightarrow\; x+4=16 \;\Leftrightarrow\; x=12$ mit $\mathbf{L}=\{12\}$

§ 11 Lösungen zu § 5

Aufgabe 501

Berechne die Lösungsmenge zu

(a) $3^x = 27$ (b) $2^x = \sqrt{2}$ (c) $4^x = 2$

(d) $9^x = \frac{1}{3}$ (e) $125^x = \frac{1}{25}$ (f) $4^{-x} = 32$

Lösung

(a) $3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$ $\mathbf{L} = \{3\}$

(b) $2^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ $\mathbf{L} = \{\frac{1}{2}\}$

(c) $4^x = 2 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ $\mathbf{L} = \{\frac{1}{2}\}$

(d) $9^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $\mathbf{L} = \{-\frac{1}{2}\}$

(e) $125^x = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^{-2} \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ $\mathbf{L} = \{-\frac{2}{3}\}$

(f) $4^{-x} = 32 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Leftrightarrow -2x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ $\mathbf{L} = \{-\frac{5}{2}\}$

Aufgabe 502

Berechne die Lösungsmenge zu

(a) $3^x = 2$ (b) $5^x = 8$ (c) $3^{-x} = 16$

(d) $2^{3x} = 6$ (e) $3^{2x} = 7$ (f) $2^{x+2} = 10$

Lösung

(a) $3^x = 2 \quad |\lg$

$\lg 3^x = \lg 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \lg 3 = \lg 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1{,}58$ $\quad \mathbf{L} = \{1{,}58\}$

(b) $5^x = 8 \quad |\lg$

$\lg 5^x = \lg 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \lg 5 = \lg 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 8}{\lg 5} \approx 1{,}29$ $\quad \mathbf{L} = \{1{,}29\}$

(c) $3^{-x} = 16 \quad |\lg$

$\lg 3^{-x} = \lg 16 \quad \Leftrightarrow \quad -x \cdot \lg 3 = \lg 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\lg 16}{\lg 3} \approx -2{,}52$ $\quad \mathbf{L} = \{-2{,}52\}$

(d) $2^{3x} = 6 \quad |\lg$

$\lg 2^{3x} = \lg 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \cdot \lg 2 = \lg 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 6}{3 \cdot \lg 2} \approx 0{,}86$ $\quad \mathbf{L} = \{0{,}86\}$

(e) $3^{2x} = 7 \quad |\lg$

$\lg 3^{2x} = \lg 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \cdot \lg 3 = \lg 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 7}{2 \cdot \lg 3} = \frac{\lg 7}{\lg 9} \approx 0{,}86$ $\quad \mathbf{L} = \{0{,}86\}$

(f) $2^{x+2} = 10 \quad |\lg$

$\lg 2^{x+2} = \lg 10 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2) \cdot \lg 2 = \lg 10 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = \frac{\lg 10}{\lg 2}$

$x = \frac{\lg 10}{\lg 2} - 2 \approx 1{,}32$ $\quad \mathbf{L} = \{1{,}32\}$

Aufgabe 503

(a) $2^x = 5$ (b) $3^x = 24$ (c) $4^x = \frac{1}{3}$

(d) $2^{x+2} = 5$ (e) $3^{4x} = 5$

Lösung

(a)
$$2^x = 5$$
$$x \cdot \lg 2 = \lg 5$$
$$x = \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx 2{,}3219$$

(b)
$$3^x = 24$$
$$x \cdot \lg 3 = \lg 24$$
$$x = \frac{\lg 24}{\lg 3} \approx 2{,}8928$$

(c)
$$4^x = \tfrac{1}{3}$$
$$x \cdot \lg 4 = \lg \tfrac{1}{3} = -\lg 3$$
$$x = -\frac{\lg 3}{\lg 4} \approx -0{,}7925$$

(d)
$$2^{x+2} = 5$$
$$(x+2) \cdot \lg 2 = \lg 5$$
$$x + 2 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$$
$$x = \frac{\lg 5}{\lg 2} - 2 \approx 0{,}3219$$

(e)
$$3^{4x} = 5$$
$$4x \cdot \lg 3 = \lg 5$$
$$x = \frac{\lg 5}{4 \cdot \lg 3} \approx 0{,}3662$$

§ 12 Lösungen zu § 6

Aufgabe 601

Berechne:

$\log_7 12;\quad \log_5 7;\quad \log_{12} 7;\quad \log_{28} 56;\quad \log_{27} 3;\quad \log_3(-8);\quad \log_5 \sqrt{6}$

Lösung

$$\log_7 5 = \frac{\lg 5}{\lg 7} \approx 0{,}8271$$

$$\log_7 12 = \frac{\lg 12}{\lg 7} \approx 1{,}2770$$

$$\log_5 7 = \frac{\lg 7}{\lg 5} \approx 1{,}2091$$

$$\log_{12} 7 = \frac{\lg 7}{\lg 12} \approx 0{,}7831$$

$$\log_{28} 56 = \frac{\lg 56}{\lg 28} \approx 1{,}2080$$

$$\log_{27} 3 \approx 0{,}3333$$

Bem.: Ohne Taschenrechner ist $\log_{27} 3 = \log_{27} 27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

$\log_3(-8)$ existiert nicht, denn jede Potenz von 3 ist positiv !

$$\log_5 \sqrt{6} = \frac{\lg\sqrt{6}}{\lg 5} = \frac{\log 6^{\frac{1}{2}}}{\lg 5} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\log 6}{\lg 5} = \frac{\log 6}{2\cdot\lg 5} = \frac{\log 6}{\lg 25} \approx 0{,}5566$$

Aufgabe 602

Berechne mit dem Taschenrechner auf 3 Dezimalen genau.
Gib zur Begründung eine Folge von Gleichungen an,

(a) $\log_{12} 17$ (b) $\log_{17} 12$ (c) $\log_7 21$

(d) $\log_8 15$ (e) $\log_7 13$

Lösung

(a) $x = \log_{12} 17 \Leftrightarrow 12^x = 17 \Leftrightarrow x \cdot \lg 12 = \lg 17 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 17}{\lg 12} \approx 1{,}140$

(b) $x = \log_{17} 12 \Leftrightarrow 17^x = 12 \Leftrightarrow x \cdot \lg 17 = \lg 12 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 12}{\lg 17} \approx 0{,}877$

(c) $x = \log_7 21 \Leftrightarrow 7^x = 21 \Leftrightarrow x \cdot \lg 7 = \lg 21 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 21}{\lg 7} \approx 1{,}565$

(d) $x = \log_8 15 \Leftrightarrow 8^x = 15 \Leftrightarrow x \cdot \lg 8 = \lg 15 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 15}{\lg 8} \approx 1{,}3023$

(e) $x = \log_7 13 \Leftrightarrow 7^x = 13 \Leftrightarrow x \cdot \lg 7 = \lg 13 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 13}{\lg 7} \approx 1{,}318$